المصفوفات

1-2- تعريف مصفوفة

ليكن الحقل $\mathbb{R}$. m ، n عددان طبيعيان

لنأخذ المقادير السلمية (الأعداد الحقيقية) a_{ij} من الحقل $\mathbb{R}$ حيث $i = 1, \dots, m$. $j = 1, \dots, n$

نسمي **مصفوفة** ؛ الجدول التالي:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

تسمى مجموعة العناصر التي لها نفس الدليل الأول i سطرًا و مجموعة العناصر التي لها نفس الدليل الثاني j عمودًا ونقول عندئذ أن المصفوفة ذات m سطرا و n عمودا وأنها من الدرجة $m \times n$
العنصر a_{ij} يقع في السطر i والعمود j .
نرمز عادة لهذه المصفوفة بالرمز $A = (a_{ij})$.
ونرمز لمجموعة المصفوفات ذات m سطرًا و n عمودًا بالرمز $M_{m,n}(\mathbb{R})$.

*اذا كان $n = m$ تسمى المصفوفة بالمصفوفة المربعة ونكتب $A \in M_n(R)$

*اذاكان جميع عناصر المصفوفة معدومة اي $\forall i, j;\ a_{ij} = 0$ تسمى بالمصفوفة المعدومة

*اذاكان جميع العناصر معدومة ماعدا عناصر القطر تساوي 1 يعني $\forall i = j\ ;\ a_{ij} = 1 \wedge \forall i \neq j\ ; a_{ij} = 0$

تسمى مصفوفة الوحدة ويرمز لها بالرمز I_n $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ مصفوفة الوحدة حيث $n = 3$

*تتساوى مصفوفتين اذا وفقط اذا كان لهما نفس عدد الاسطر ونفس عدد الاعمدة وكانت عناصرهما المتناظرة متساوية

وتكون المصفوفة المربعة:
<u>مثلثية علوية</u> إذا كانت جميع العناصر التي تحت القطر الرئيسي معدومة، $(\forall i > j\ ;\ a_{ij} = 0)$
<u>مثلثية سفلية</u> إذا كانت جميع العناصر التي فوق القطر الرئيسي معدومة، $(\forall i < j\ ;\ a_{ij} = 0)$

امثلة

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ *مصفوفة مربعة* $A \in M_{3,3}(R)$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 23 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ مصفوفة مثلثية علوية

2-2- المصفوفة المرافقة لتطبيق خطي

ليكن E_1، E_2 فضاءين شعاعيين على الحقل $\mathbb{R}$ ببعدين منتهيين n ، m على التوالي، وليكن:
$\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ أساساً في E_1 ، $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ أساساً في E_2 .

وليكن f تطبيقاً خطياً من E_1 نحو E_2 ؛
صور أشعة أساس E_1 : $f(u_1)$، $f(u_2)$، ...، $f(u_n)$ هي أشعة من E_2 فهي تُكتب على شكل تركيب خطي لأشعة أساس E_2 على النحو التالي:

$$\begin{aligned} f(u_1) &= a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \cdots + a_{m1}v_m \\ f(u_2) &= a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + \cdots + a_{m2}v_m \\ \vdots \; &= \; \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ f(u_n) &= a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + \cdots + a_{mn}v_m \end{aligned}$$

حيث a_{ij} هي عناصر من الحقل $\mathbb{R}$.

نسمي المصفوفة: $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

بالمصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي f بالنسبة للأساس $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ في E_1 والأساس $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ في E_2 .
ونقول أيضا أن f هو التطبيق الخطي المرافق للمصفوفة A .

لاحظ أن العمود الأول للمصفوفة مكون من المقادير السلمية للمزج الخطي في المعادلة الأولى، والعمود الثاني من المعادلة الثانية وهكذا إلى آخر عمود.

عدد الأعمدة = عدد أشعة أساس فضاء المنطلق E_1 $= dim(E_1)$

عدد الأسطر = عدد أشعة أساس فضاء الوصول(المستقر) E_2 $= dim(E_2)$

فمثلا إذا كان التطبيق الخطي معرفاً من $\mathbb{R}^4$ نحو $\mathbb{R}^2$ فإن المصفوفة المرافقة له تكون ذات أربعة أعمدة وسطران،
وإذا كانت المصفوفة ذات ثلاثة أسطر وخمسة أعمدة فإن التطبيق الخطي المرافق لها يكون معرفاً من $\mathbb{R}^5$ نحو $\mathbb{R}^3$

مثال

ليكن f تطبيقاً خطيا معرفا كما يلي:

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$f(x,y) = (x+y, -x+y, x-2y)$$

وفق الأساس القانوني $\{e_1, e_2\}$ لـ $\mathbb{R}^2$ والأساس القانوني $\{\grave{e}_1, \grave{e}_2, \grave{e}_3\}$ لـ $\mathbb{R}^3$

عين المصفوفة المرافقة لـ f.

<u>الحل</u>

نكتب صور أشعة أساس فضاء المنطلق بواسطة f على شكل تركيب خطي لأشعة أساس فضاء المستقر:

$$f(e_1) = a_{11}\grave{e}_1 + a_{21}\grave{e}_2 + a_{31}\grave{e}_3 \dots\dots (1)$$
$$f(e_2) = a_{12}\grave{e}_1 + a_{22}\grave{e}_2 + a_{32}\grave{e}_3 \dots\dots (2)$$

وتكون المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي f هي

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

نذكر أن $\{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}$ و $\{\grave{e}_1 = (1,0,0), \grave{e}_2 = (0,1,0), \grave{e}_3 = (0,0,1)\}$.

نبحث عن عناصر المصفوفة A باستخدام عبارة f

$$f(e_1) = f(1,0) = \big(1+0, -1+0, 1-2(0)\big) = (1,-1,1)$$
$$f(e_2) = f(0,1) = \big(0+1, -(0)+1, 0-2(1)\big) = (1,1,-2)$$

نعوض قيمة $f(e_1)$ في المعادلة (1)

$$(1,-1,1) = a_{11}(1,0,0) + a_{21}(0,1,0) + a_{31}(0,0,1)$$

نحصل على جملة ثلاث معادلات وثلاثة مجاهيل:

$$\begin{cases} a_{11}(1) + a_{21}(0)a_{31}(0) = 1 \\ a_{11}(0) + a_{21}(1)a_{31}(0) = -1 \\ a_{11}(0) + a_{21}(0)a_{31}(1) = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a_{11} = 1 \\ a_{21} = -1 \\ a_{31} = 1 \end{cases}$$

ثم نعوض قيمة $f(e_2)$ في المعادلة (2) نجد

$$(1,1,-2) = a_{12}(1,0,0) + a_{22}(0,1,0) + a_{32}(0,0,1)$$

فنحصل على الجملة:

$$\begin{cases} a_{12}(1) + a_{22}(0)a_{32}(0) = 1 \\ a_{12}(0) + a_{22}(1)a_{32}(0) = 1 \\ a_{12}(0) + a_{22}(0)a_{32}(1) = -2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a_{12} = 1 \\ a_{22} = 1 \\ a_{32} = -2 \end{cases}$$

إذن

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

لاحظ أن المصفوفة ذات عمودين (بعد $\mathbb{R}^2$) وثلاثة أسطر (بعد $\mathbb{R}^3$) .

3-2 العمليات على المصفوفات:

*جمع المصفوفات

ليكن $A,B \in M_{nm}(R)$ حيث $A=(a_{ij})\ ,B=(b_{ij})$ مجموع المصفوفتين AوB هو المصفوفة

$C=(c_{ij})=(a_{ij}+b_{ij})$

-اذاكانت المصفوفتان ليستا من نفس الدرجة فان المجموع غير معرف

مثال

$$A+B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 0\\ -2 & -2 & 5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+1 & 3+2 & 3+0\\ -2+0 & -2+1 & 5+4\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}3 & 5 & 3\\ -2 & -1 & 9\end{pmatrix}$$

ملاحظات

جمع المصفوفات تبديلي $A+B=B+A$

جمع المصفوفات تجميعي $A+(B+C)=(A+B)+C$

*ضرب مصفوفة بسلمية(عدد حقيقي)

جداء المصفوفة $A=(a_{ij})$ في السلمية α هي المصفوفة $\alpha A=(\alpha a_{ij})$

مثال

$$3\begin{pmatrix}2 & 3 & 0\\ -2 & -2 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\times 2 & 3\times 3 & 3\times 0\\ 3\times -2 & 3\times -2 & 3\times 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 9 & 0\\ -6 & -6 & 15\end{pmatrix}$$

*ضرب المصفوفات

لتكن المصفوفتان $A=(a_{ij})\ ,B=(b_{ij})$ لكي يكون الجداء $A\times B$ معرف لابد من ان يكون عدد اعمدة A مساوي لعدد أسطر B يعني $A\in M_{mn}\ ,B\in M_{np}$ ويعرف كمايلي

$$C=A\times B=(c_{ij})=(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj})\ ,C\in M_{mp}$$

امثلة

$$\begin{pmatrix}2 & 5 & -1\\ 1 & 4 & 0\\ -2 & -3 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7 & 6\\ 9 & 8\\ 2 & 1\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}(2\times 7)+(5\times 9)+(-1)\times 2 & (2\times 6)+(5\times 8)+(-1)\times 1\\ (1\times 7)+(4\times 9)+(0\times 2) & (1\times 6)+(4\times 8)+(0\times 1)\\ (-2)\times 7+(-3)\times 9+(3\times 2) & (-2)\times 6+(-3)\times 8+(3\times 1)\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}57 & 51\\ 43 & 38\\ -35 & -33\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0 & -2\\ 1 & 5 & 4\end{pmatrix} =$$
$$= \big((3)(2)+(3)(1) \quad (3)(0)+(3)(5) \quad (3)(-2)+(3)(4)\big)$$
$$= \begin{pmatrix}9 & 15 & 6\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2 & 4 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\5\\1\end{pmatrix} = \big((2\times 3)+(4\times 5)+(-1)\times 1\big) = (6+20-1) = (25)$$

$$\begin{pmatrix}3\\5\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 4 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\times 2 & 3\times 4 & 3\times(-1)\\ 5\times 2 & 5\times 4 & 5\times(-1)\\ 1\times 2 & 1\times 4 & 1\times(-1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6 & 12 & -3\\ 10 & 20 & -5\\ 2 & 4 & -1\end{pmatrix}$$

من خلال الجداءين الاخيرين نستنتج ان الضرب ليس تبديلي

ملاحظة $I_n \times A = A \times I_m$,$A\in M_{nm}(R)$

*منقول مصفوفة

لتكن المصفوفة $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{R})$. فإن منقول المصفوفة A هي المصفوفة A^T حيث $A^T = (c_{ij}) \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ و $c_{ij} = a_{ji}$ ، فللحصول على منقول المصفوفة نجعل الأسطر أعمدة والأعمدة أسطرا.

ينتج من هذا التعريف أن $(A^T)^T = A$.

إذا كان $A^T = A$ فإن A تُسمى مصفوفة متناظرة.

ولدينا أيضا:

$$\forall A, B \in M_{m,n}(\mathbb{R}) \quad , \quad (A+B)^T = (A)^T + (B)^T$$
$$\forall A \in M_{m,n}(\mathbb{R}) \quad , \quad \forall B \in M_{n,r}(\mathbb{R}) \quad , \quad (AB)^T = (B)^T(A)^T .$$

مثال

$$A = \begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix}0 & 1 & 3\\ 2 & 1 & 4\end{pmatrix}$$

*أثر مصفوفة

لتكن المصفوفة المربعة $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$

أثر المصفوفة A هو مجموع عناصر القطر الرئيسي ويرمز له بالرمز $Tr(A)$ ، أي أن

$$Tr(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kk}$$

مثال

$$A=\begin{pmatrix}4 & 0 & 1\\ 3 & 2 & 7\\ 5 & 1 & -1\end{pmatrix}\Longrightarrow Tr(A)=4+2+(-1)=5$$

4-2 المحددات

*يحسب محدد مصفوفة مربعة ذات سطرين وعمودين كمايلي $\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=ab-cd$

*محدد الخاص بالمصفوفات $A\in M_n(R)$ يحسب كمايلي

$$\det(A)=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det(A_{ij})$$

حيث A_{ij} هي المصفوفة الناتجة من شطب السطر i والعمود j من المصفوفة المراد حساب محددها

مثال

$$det(M)=\begin{vmatrix}3 & -2 & -4\\ 1 & 2 & -1\\ -3 & 0 & 1\end{vmatrix}$$

$$=+(3)\begin{vmatrix}2 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix}-(-2)\begin{vmatrix}1 & -1\\ -3 & 1\end{vmatrix}+(-4)\begin{vmatrix}1 & 2\\ -3 & 0\end{vmatrix}$$

$$=3[(2)(1)-(-1)(0)]+2[(1)(1)-(-1)(-3)]$$
$$-4[(1)(0)-(2)(-3)]$$
$$=3[2-0]+2[1-3]-4[0+6]=3(2)+2(-2)-4(6)=-22$$

*طريقة اخرى لحساب المحدد

نقوم بإعادة كتابة العمودين الأول والثاني أمام المصفوفة A ثم نستعمل أسهم قطرية مع إشارات موجبة وسالبة هكذا:

$$\begin{array}{ccc} + & + & + \\ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}\begin{matrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{matrix}$$
$$\begin{array}{ccc} - & - & - \\ \end{array}$$

المحدد =

جداء عناصر القطر النازل الأول + جداء عناصر القطر النازل الثاني + جداء عناصر القطر النازل الثالث – جداء عناصر القطر الصاعد الأول – جداء عناصر القطر الصاعد الثاني – جداء عناصر القطر النازل الثالث.

مثال

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} + & + & + \\ 3 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \\ - & - & - \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ 3 & -2 \\ 1 & 2 \\ -3 & 0 \\ \\ \end{matrix} \end{array}$$

$$det(M) = (3)(2)(1) + (-2)(-1)(-3) + (-4)(1)(0) - (-3)(2)(-4) - (0)(-1)(3) - (1)(1)(-2)$$

$$= (6) + (-6) + (0) - (24) - (0) - (-2) = -22$$

2-5- مقلوب مصفوفة بطريقة المصفوفة المرافقة

لتكن المصفوفة $A = (a_{ij}) \in M_n(R)$

تكون المصفوفة قابلة للقلب اذا وفقط اذاكان محددها يختلف عن الصفر غير معدوم ونرمز للمقلوب بالرمز A^{-1}

ويعطي بالعبارة $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} C^t$

C هي المصفوفة المرافقة تعطي بالعلاقة $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det(W_{ij})$

W_{ij} نتحصل عليها بعد شطب السطر i والعمود j من المصفوفة A

مثال

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 2 = 3 \neq 0$$

إذن A قابلة للقلب

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} (B)^T$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \quad , \quad b_{ij} = (-1)^{i+j} det(A_{ij})$$

$$b_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}, \quad b_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, \quad b_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, \ldots\ldots$$

$$B = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$