TD N°2 Notions de base pour le calcul des probabilités

Exercice 1. *1.Montrer qu'une intersection quelconque de tribus sur* Ω *est une tribu sur* Ω.
2. L'ensemble des parties finies de Ω *est-il une tribu ?*

Exercice 2. *On considère* $\mathcal{A}$ *l'ensemble des parties* $A \subset \mathbb{N}$ *vérifiant* A *est fini ou* $\overline{A}$ *est fini. Est ce que* $\mathcal{A}$ *est une tribu sur* $\mathbb{N}$.

Exercice 3. *Soit* $\mathcal{F}$ *une tribu sur un ensemble* Ω *et* $A \subset \Omega$. *Montrer que* $\mathcal{F}_A = \{A \cap B,\ B \in \mathcal{F}\}$. *Montrer que* $\mathcal{F}_A$ *est une tribu sur* A *(tribu trace de* $\mathcal{F}$ *sur* A*).*

Exercice 4. *Soient* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé et* $\mathcal{G} = \{A \in \mathcal{F},\ \mathbb{P}(A) = 0,\ ou\ \mathbb{P}(A) = 1\}$. *Montrer que* $\mathcal{G}$ *est une tribu sur* Ω.

Exercice 5. *Soient* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé et* A, B, C *trois évènements de* $\mathcal{F}$. *Trouver l'expression ensembliste des évènements suivants à partir des évènements* A, B, C.

- (a) *A seul se réalise,*
- (b) *A et B se réalisent mais C ne se réalise pas,*
- (c) *un évènement au moins se réalise,*
- (d) *un évènement au plus se réalise,*
- (e) *au moins deux évènements se réalisent,*
- (f) *les trois évènements se réalisent,*
- (g) *aucun évènement ne se réalise,*
- (h) *au plus deux évènements se réalisent.*

Exercice 6. *Soient* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé et* $A_1, A_2, ..., A_n$ n *évènements de* $\mathcal{F}$. *Montrer que :*

(1) . $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$

(2) . $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i\right) \geq 1 - \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(\overline{A}_i\right)$

(3) . $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum\limits_{p=1}^{n} (-1)^{p+1} \sum\limits_{1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_p \leq n} \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{j=1}^{p} A_{i_j}\right)$ *(Formule du crible)*

Exercice 7. *Soient* Ω *un ensemble non vide et* ω *un point de* Ω. *Pour* $A \subset \Omega$, *on pose* $\delta_\omega(A) = 1$ *si* $\omega \in A$ *et* 0 *sinon. Montrer que* δ_ω *est une probabilité sur* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ *(*δ_ω *appelé masse de Dirac au point* ω*).*

Exercice 8. *Soient* $(\mathbb{P}_k)_{k\geq 0}$ *une suite de probabilités sur* $(\Omega, \mathcal{F})$ *et* $(p_k)_{k\geq 0}$ *une suites de nombres réels de* $[0, 1]$. *Montrer que l'application* $\mathbb{P}$, *définie par*

$$\forall A \in \mathcal{F}, \mathbb{P}(A) = \sum_{k\geq 0} p_k \mathbb{P}_k(A)$$

est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$ *dès que* $\sum\limits_{k\geq 0} p_k = 1$.

Exercice 9. *On considère une classe de* n *élèves. On suppose qu'il n'y a pas d'année bissextile.*

(1). *Quelle est la probabilité,* p_n, *pour que deux élèves au moins aient la même date d'anniversaire. Calculer* p_{366}.

(2). *Quelle est la probabilité,* q_n, *pour qu'au moins un élève ait la même date d'anniversaire que Ali ?*

Exercice 10. *A possède deux dés à six faces, et B possède un dé à douze faces. En lançant ces dés, le joueur qui fait le plus grand score (le score de A est la somme des deux chiffres) remporte la mise (match nul si egalité) . Le jeu est-il equilibré ? On calculera la probabilité que A gagne et la probabilité d'avoir un match nul.*

Exercice 11. *On jette trois dés non pipés. Calculer :*

(a) . *La probabilité d'obtenir au moins un as ;*

(b) . *La probabilité d'obtenir au moins deux faces portant le même chiffre ;*

(c) *La probabilité que la somme des points marqués sur les trois faces soit paire ;*

(d) . La probabilité que la somme des points soit paire et que deux faces portent le même numéro.

Exercice 12. *On cherche un parapluie qui, avec la probabilité $\frac{p}{7}$, se trouve dans l'un quelconque des 7 étages d'un immeuble. On a cherché dans les 6 premiers étages mais on ne l'a pas trouvé. Quelle est la proababilté que le parapluie se trouve au 7^{eme} étage ?.*

Exercice 13. *On considère trois urnes numérotées de 1 à 3. L'urne n° 1 contient 1 boule blanche et 2 noires, l'urne n° 2 contient 2 boules blanches et 1 noire et L'urne n° 3 contient 3 boules blanches. On choisit une urne au hasard puis on tire une boule dans cette urne.*

1. Quelle est la probabilité pour que cette boule soit blanche ?

2. Sachant que la boule tirée est blanche calculer la probabilité qu'elle est tirée de l'urne n° 1 ?.

Exercice 14. *Trois machines A, B et C produisent respectivement 50%, 30% et 20% du nombre total de pièces fabriquées par une usine. Le pourcentage de pièces défectueuses pour chaque machine est respectivement 3%,4% et 5%.*

1. Quelle est la probabilité qu'une pièce prise au hasard soit défectueuse ?

2. Quelle est la probabilité qu'une pièce prise au hasard soit bonne ?

2. Si on prend une pièce qui s'avère être défectueuse, quelle est la probabilité qu'elle ait été produite par A, B, C ?

Exercice 15. *Deux évènements E et F sont dits indépendants conditionnellement à un évènement C si : $\mathbb{P}((E \cap F)/C) = \mathbb{P}(E/C)\,\mathbb{P}(F/C)$. Montrer que E et F peuvent être indépendants, et ne plus l'être conditionnellement à un évènement C.*

Exercice 16. *On considère 3 urnes U_1, U_2 et U_3 contiennent des boules blanches et noires. La proportion de boules blanches dans chaque urne est $0,3$, $0,6$ et $0,4$ respectivement. On tire au hasard une boule de l'urne U_1, si la boule est blanche (noire) on tire une deuxième boule de l'urne U_2 (U_3 respectivement).*

1. Calculer la probabilité que la deuxième boule soit noire ?

2. Calculer la probabilité que la deuxième boule soit blanche ?

3. Sachant que le deuxième boule est blanche quelle est la probabilité que la première est noire ?

4.Sachant que le deuxième boule est blanche quelle est la probabilité que la première est blanche ?

Exercice 17. *On jette au hasard* $2n$ *boules numérotées de* 1 *à* $2n$ *vers* n *boites numérotées de* 1 *à* n*, chaque boite pouvant recevoir la totalité des boules. Quelles sont les probabilités pour que :*

1. *Toutes les boules tombent dans les boites* 1 *et* 2?
2. *Chaque boite reçoive exactement* 2 *boules ?*

Exercice 18. *Dans une population comprenant* 40% *de fumeurs,* 30% *des personnes sont atteintes d'une certaine maladie respiratoire. Sachant que parmi les fumeurs,* 60% *sont atteints par cette maladie, calculer la probabilité pour qu'une personne malade soit un fumeur.*

Exercice 19. *Soit* $[a,b]$ *un intervalle de* $\mathbb{R}$*. Soit* f *lafonction définie par :*

$$f(x)\begin{cases} \frac{1}{b-a}, si\ x \in [a,b] \\ 0, sinon \end{cases}$$

1.Montrer que $f(x)$ *est une densité de probabilité* $\mathbb{P}$ *?*

2. *Calculer la fonction de répartition* $F(x)$?
3. *Calculer les probabilité* $\mathbb{P}(]-\infty,a]), \mathbb{P}([b,+\infty[)$.

Exercice 20. *À quelle condition sur le réel* λ *, la fonction définie pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *par* $f(x) = \lambda |x| e^{-|x|}$ *est-elle une densité de probabilité ? Dans ce cas, déterminer la fonction de répartition associée et calculer les probabilités* $\mathbb{P}(]-\infty,0]), \mathbb{P}([0,+\infty[)$, *et* $\mathbb{P}(]1,3])$.