Cours de Biostatistique

Les variables aléatoires :

Chapitre 4

Variables aléatoires

Après avoir réalisé une expérience, on s'intéresse souvent à une certaine fonction du résultat et non au résultat en lui-même. Un nombre est associé à chaque résultat de l'expérience : nombre de particules émises par un élément radioactif durant un intervalle de temps donné, puissance moyenne d'un "bruit" accompagnant la réception d'un signal radio, nombre d'enfants dans une famille, etc. Ces grandeurs (ou fonctions) auxquelles on s'intéresse sont en fait des fonctions réelles définies sur l'ensemble fondamental et sont appelées **variables aléatoires**.
On considère un ensemble Ω muni d'une probabilité P.

Définition 4.1. Une variable aléatoire X est une application de l'ensemble fondamental Ω dans $\mathbb{R}$, $X : \Omega \to \mathbb{R}$, telle que que l'inverse de chaque intervalle de $\mathbb{R}$ est un événement de Ω.

On distingue deux types de variables aléatoires :

1. les variables aléatoires discrètes ;
2. les variables aléatoires continues.

4.1 Variables aléatoires discrètes

Définition 4.2. Une variable aléatoire est dite discrète si elle peut prendre un nombre fini de valeurs isolées (exemple : valeurs entières).

Exemple 4.1. En lançant un dé à six faces numérotées et en observant la face supérieure, l'ensemble fini des valeurs obtenues est : 1, 2, 3, 4, 5 et 6.

4.1.1 Loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète

Soit X une variable aléatoire sur un ensemble fondamental Ω à valeurs finies, c'est à dire $X(\Omega) = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Si l'on définit la probabilité $p(X = x_i) = p_i$ des valeurs x_i. Cette probabilité $p(X = x_i) = p_i$, est appelée la distribution ou la loi de probabilité de X, que l'on donne habituellement sous la forme du tableau suivant (tableau 4.1) :

x_i	x_1	x_2	x_3	$\ldots$	x_n
$p(X = x_i)$	$p(X = x_1)$	$p(X = x_2)$	$p(X = x_3)$	$\ldots$	$p(X = x_n)$

TABLE 4.1 – La loi d'une variable aléatoire

La loi de probabilité satisfait les conditions :

$$0 \leq p(X = x_i) \leq 1 \text{ et } \sum_{i=1}^{n} p(X = x_i) = 1.$$

Exemple 4.2. On jette une paire de dès bien équilibrés et on obtient l'ensemble fondamental Ω dont les éléments sont les 36 couples ordonnés des nombres allant de 1 à 6.

$$\Omega = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), ..., (6, 5), (6, 6)\}.$$

On suppose que la v.a. X est le maximum de point (a, b) de Ω, c'est-à-dire $X(a, b) = max(a, b)$; alors X sera définie par :

$$X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

$$\begin{aligned}
p(X = 1) &= p(\{(1, 1)\}) = \frac{1}{36};\\
p(X = 2) &= p(\{(1, 2), (2, 1), (2, 2)\}) = \frac{3}{36};\\
p(X = 3) &= p(\{(1, 3), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}) = \frac{5}{36};\\
p(X = 4) &= p(\{(1, 4), (2, 4), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}) = \frac{7}{36};
\end{aligned}$$

de la même façon :

$$p(X = 5) = \frac{9}{36} \text{ et } p(X = 6) = \frac{11}{36}.$$

Cette information se résume dans le tableau 4.2.

On suppose maintenant une autre variable aléatoire Y, c'est la somme de composantes des couples (a, b), c'est-à-dire $Y(a, b) = a + b$; alors Y est définie par :

$$Y(\Omega) = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}.$$

La distribution de Y est donnée dans le tableau 4.3.

x_i	1	2	3	4	5	6
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

TABLE 4.2 – La distribution de la v.a. X.

y_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p(Y = y_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

TABLE 4.3 – La distribution de la v.a. Y.

4.1.2 Fonction de distribution et de répartition

1. **Fonction de distribution**

   Cette fonction indique la loi de probabilité de la v.a. X. Elle est représentée par un diagramme en bâtons.

   Exemple 4.3. Les diagrammes qui suivent, donnent une description graphique des distributions des variables aléatoires X (voir figure 4.1) et Y (voir figure 4.2) de l'exemple précédent.

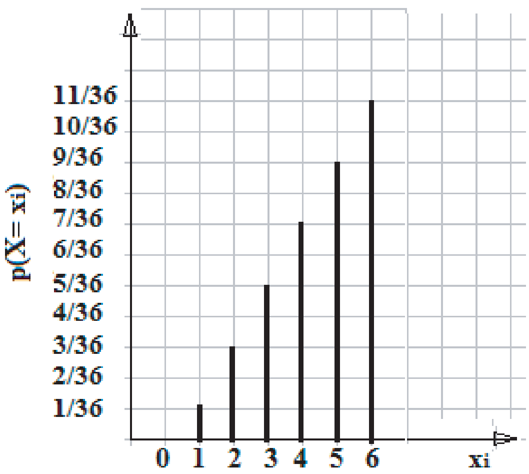


FIGURE 4.1 – Distribution de la v.a. X.

2. **Fonction de répartition**

   La fonction de répartition donne la probabilité que la variable aléatoire X prenne une valeur inférieure à x. La fonction de répartition est définie par :

$$F(x) = p(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p(X = x_i).$$

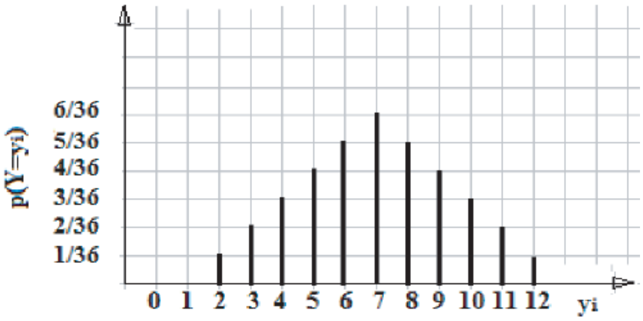


FIGURE 4.2 – Distribution de la v.a. Y.

Remarque 4.1. La représentation graphique de la fonction de répartition de le cas discret prend la forme d'un diagramme en escaliers (voir figure 4.3).
F est monotone croissante et prend ses valeurs dans $[0, 1]$.

Exemple 4.4. La fonction de répartition de la variable aléatoire X est donnée par :

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 1\,; \\ \frac{1}{36}, & \text{si } 1 \leq x < 2\,; \\ \frac{4}{36}, & \text{si } 2 \leq x < 3\,; \\ \frac{9}{36}, & \text{si } 3 \leq x < 4\,; \\ \frac{16}{36}, & \text{si } 4 \leq x < 5\,; \\ \frac{25}{36}, & \text{si } 5 \leq x < 6\,; \\ \frac{36}{36} = 1, & \text{si } x \geq 6. \end{cases}$$

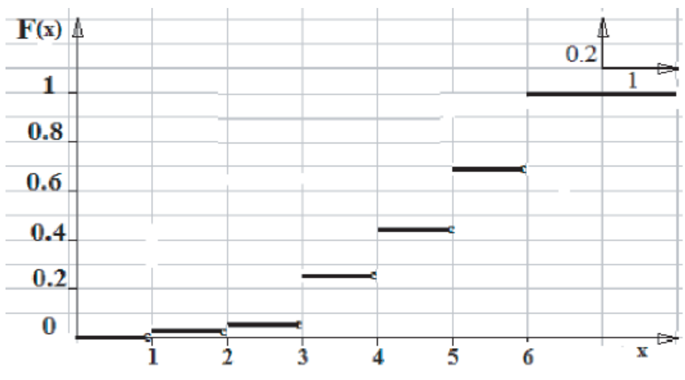


FIGURE 4.3 – Courbe de la fonction de répartition de la v.a. X.

4.1.3 Espérance mathématique d'une variable aléatoire discrète

Définition 4.3. Soit X une variable aléatoire ayant la loi de probabilité $p(X = x_i)_{i=\overline{1,n}}$. La moyenne ou l'espérance mathématique de X que l'on note $E(X)$ ou μ_x est la somme des valeurs prises par X pondérées par les probabilités qui leur sont associées (la valeur prise en moyenne par cette v.a.), elle est donnée par :

$$\begin{aligned} E(X) &= x_1 p(X = x_1) + x_2 p(X = x_2) + ... + x_n p(X = x_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i p(X = x_i). \end{aligned}$$

Exemple 4.5. On reprend l'exemple 4.2.
• L'espérance mathématique de la variable aléatoire X est :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^{n} x_i p(X = x_i) \\ &= 1.\frac{1}{36} + 2.\frac{3}{36} + 3.\frac{5}{36} + 4.\frac{7}{36} + 5.\frac{9}{36} + 6.\frac{11}{36} \\ &= \frac{161}{36} = 4,47 \end{aligned}$$

• L'espérance mathématique de la variable aléatoire Y est :

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{i=1}^{n} y_i p(Y = y_i) \\ &= 2.\frac{1}{36} + 3.\frac{2}{36} + 4.\frac{3}{36} + 5.\frac{4}{36} + 6.\frac{5}{36} + 7.\frac{6}{36} + 8.\frac{5}{36} + 9.\frac{4}{36} + 10.\frac{3}{36} + 11.\frac{2}{36} + 12.\frac{1}{36} \\ &= \frac{252}{36} = 7. \end{aligned}$$

Propriétés de $E(X)$

Désignons par X et Y deux variables aléatoires définies sur Ω, α et β deux constantes réelles.

1. $E(\alpha X) = \alpha E(X)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.
2. $E(\alpha X + \beta) = \alpha E(X) + \beta$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
3. $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.
4. $E(\alpha X + \beta Y) = \alpha E(X) + \beta E(Y)$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

4.1.4 Variance et écart type d'une variable aléatoire discrète

Définition 4.4. La moyenne d'une variable aléatoire X mesure, dans un certain sens, la valeur moyenne de X et la variance (ou sa racine carrée est l'écart-type) exprime à quel point les valeurs prises par une variable aléatoire X sont dispersées autour de la moyenne.

1. **Variance de la variable aléatoire X**
   La variance de X, que l'on note $V(X)$ est définie par
   $$V(X) = E[(X - E(X))^2] = \sum_{i=1}^{n}(x_i - E(X))^2 p(X = x_i)$$
   ou
   $$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p(X = x_i) - (\sum_{i=1}^{n} x_i p(X = x_i))^2.$$
2. **Écart type de la variable aléatoire X**
   L'écart type de X, que l'on note $\sigma(X)$ est la racine carrée de $V(X)$:
   $$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

Exemple 4.6. Considérons les variables aléatoires X et Y de l'exemple 4.2, avec leurs moyennes $E(X) = 4,47$ et $E(Y) = 7$.

- La variance de la variable aléatoire X est donnée par $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$, avec

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p(X = x_i) \\ &= 1^2.\frac{1}{36} + 2^2.\frac{3}{36} + 3^2.\frac{5}{36} + 4^2.\frac{7}{36} + 5^2.\frac{9}{36} + 6^2.\frac{11}{36} \\ &= \frac{191}{36} = 21,97. \end{aligned}$$

Par conséquent $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 21,97 - (4,47)^2 = 1,99$ et $\sigma(X) = \sqrt{1,99} = 1,4$.

- La variance de la variable aléatoire Y est donnée par $V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2$, avec

$$\begin{aligned} E(Y^2) &= \sum_{i=1}^{n} y_i^2 p(Y = y_i) \\ &= 2^2\frac{1}{36} + 3^2\frac{2}{36} + 4^2\frac{3}{36} + 5^2\frac{4}{36} + 6^2\frac{5}{36} + 7^2\frac{6}{36} + 8^2\frac{5}{36} + 9^2\frac{4}{36} + 10^2\frac{3}{36} + 11^2\frac{2}{36} + 12^2\frac{1}{36} \\ &= = 54,8. \end{aligned}$$

Par conséquent $V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = 54,8 - (7)^2 = 5,8$ et $\sigma(Y) = \sqrt{5,8} = 2,4$.

Propriétés de $V(X)$ et $\sigma(X)$

Désignons par X une variable aléatoire définie sur Ω, α et β deux constantes réelles.

1. La variance d'une constante est nulle : $V(\alpha) = 0$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.
2. $V(X + \alpha) = V(X)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.
3. $V(\alpha X) = \alpha^2 V(X)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.
4. $V(\alpha X + \beta) = \alpha^2 V(X)$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

D'où

1. $\sigma(X + \alpha) = \sigma(X)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.
2. $\sigma(\alpha X) = |\alpha| \sigma(X)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Remarque 4.2. Soit X une variable aléatoire de moyenne μ et d'écart type σ, on définit la variable aléatoire centrée réduite X^* correspondant à X par

$$X^* = \frac{X - \mu}{\sigma},$$

avec $E(X^*) = 0$ et $V(X^*) = 1$.

4.2 Variables aléatoires continues

Une variable aléatoire est dite continue si elle peut prendre toutes valeurs comprises dans un intervalle $]a, b]$.

Exemple 4.7. Le poids d'un enfant à la naissance est compris entre $2,7$ kg et $5,6$ kg.

4.2.1 Fonction de répartition

La fonction de répartition d'une variable continue X est définie par

$$F_X(x) = p(X \leq x).$$

La fonction F_X indique la probabilité que X soit strictement inférieure à tout x de l'intervalle de définition.

Propriétés

1. $F_X(x)$ est positive et : $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$.
2. Si la fonction F_X est continue et admet une dérivée, la variable aléatoire est dite absolument continue.

3. La représentation graphique de F_X prend la forme d'une courbe cumulative.

Remarque 4.3. Dans le cas d'**une variable aléatoire continue**, on a :

1. La probabilité attachée à un point x est nulle : $p(X = x) = 0$.
2. $p(X \leq x) = p(X < x) + p(X = x) = p(X < x)$.
3. La probabilité que la v.a. $X \in [a, b]$ est donnée par :

$$\begin{aligned} p(a \leq X \leq b) &= p(a < X \leq b) \\ &= p(a \leq X < b) \\ &= p(a < X < b) \\ &= p(X < b) - p(X < a) \\ &= F(b) - F(a). \end{aligned}$$

4.2.2 Densité de probabilité

Soit X une variable aléatoire dont l'ensemble de valeurs $X(\Omega)$ est l'intervalle $[a, b]$. Rappelons que par définition

$$p(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

La fonction f est la distribution (densité de probabilité) de la variable aléatoire continue X. Cette fonction satisfait les conditions suivantes :

1. $f(x) \geq 0$ et $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$.
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

4.2.3 Espérance mathématique et variance d'une variable aléatoire continue

Soit X une variable aléatoire de densité de probabilité f, dont le domaine de définition est $]-\infty, +\infty[$.

1. **Espérance mathématique**
   L'espérance mathématique de la v.a. X est définie par :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

2. **Variance et écart type**
   La variance de la v.a. X est définie par :

$$\begin{aligned} V(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 f(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - (E(X))^2 \\ &= E(X^2) - (E(X))^2. \end{aligned}$$

   Par définition, l'écart type est donné par $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Exemple 4.8. Soit X une variable aléatoire ayant une densité de probabilité (fonction de distribution) :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(2-x), & \text{si } 0 \leq x \leq 2\,; \\ 0, & \text{si } x \in]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[. \end{cases}$$

1. La densité de probabilité vérifie :

$$f(x) \geq 0, \forall x \in [0,2] \text{ et } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

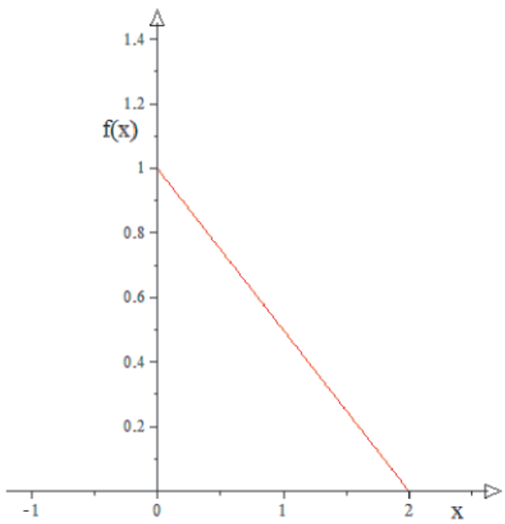


FIGURE 4.4 – Densité de probabilité de la v.a. X.

   En effet,

$\forall x \in [0,2]$, on a $0 \leq f(x) \leq 1$ et $f(x) = 0$ ailleurs ;

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx &= \int_0^2 f(x)dx \\
&= \int_0^2 \frac{1}{2}(2-x)dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^2 (2-x)dx \\
&= \frac{1}{2}[2x - \frac{x^2}{2}]_0^2 \\
&= \frac{1}{2}(4-2-0) = 1.
\end{aligned}$$

2. La fonction de répartition F est :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0\,; \\ x - \frac{1}{4}x^2, & \text{si } 0 \leq x \leq 2\,; \\ 1, & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

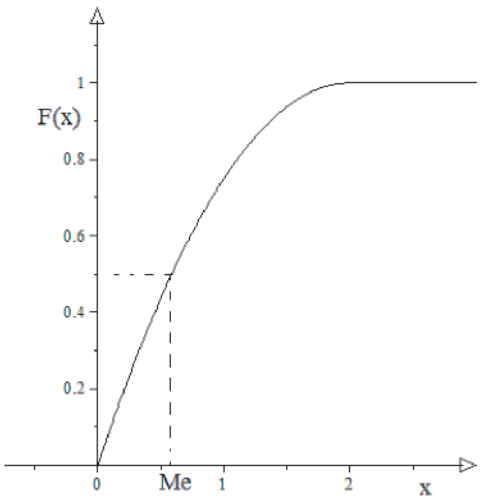


FIGURE 4.5 – Fonction de répartition de la v.a. X.

3. L'espérance de X :

$$\begin{aligned} E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx &= \int_0^2 xf(x)dx \\ &= \int_0^2 \frac{1}{2}x(2-x)dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^2 (2x-x^2)dx \\ &= \frac{1}{2}[x^2 - \frac{x^3}{3}]_0^2 \\ &= \frac{2}{3} - 0 = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

4. La variance de X :

$$\begin{aligned} V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2f(x)dx - E(X)^2 &= \int_0^2 x^2f(x)dx - E(X)^2 \\ &= \int_0^2 \frac{1}{2}x^2(2-x)dx - (\frac{2}{3})^2 \\ &= \frac{1}{2}\int_0^2 (2x^2-x^3)dx - (\frac{2}{3})^2 \\ &= \frac{1}{2}[\frac{2}{3}x^3 - \frac{x^4}{4}]_0^2 - (\frac{2}{3})^2 \\ &= \frac{2}{3} - \frac{4}{9} = \frac{2}{9}. \end{aligned}$$

5. L'écart type de X : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{2}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

4.2.4 Médiane et mode d'une variable aléatoire continue

La médiane

La médiane d'une variable aléatoire continue est le nombre réel Me tel que

$$F(Me) = 0.5 = \frac{1}{2}.$$

Autrement dit, la médiane c'est la valeur Me de X tel que $p(X < Me) = 0.5$.

Le mode

Le mode Mo est la valeur de X, qui correspond à un maximum de la fonction de densité. Il peut exister plusieurs modes, si il existe un seul maximum la densité est dite unimodale.

Exemple 4.9. Dans l'exemple 4.8, on a

$$F(x) = x - \frac{1}{4}x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{4-\sqrt{8}}{2} \text{ ou } x = \frac{4+\sqrt{8}}{2}.$$

$$x = \frac{4-\sqrt{8}}{2} \simeq 0,5857864376 \in [0;2]$$

et

$$x = \frac{4+\sqrt{8}}{2} \simeq 3.414213562 \notin [0;2],$$

alors

$$Me = \frac{4-\sqrt{8}}{2}.$$

f admet un maximum pour la valeur de $x = 0$, alors $Mo = 0$.

Chapitre 5

Lois usuelles de probabilités

5.1 Lois de probabilités discrètes

5.1.1 Loi de Bernoulli

Une expérience aléatoire ayant deux résultats possibles (succès et échec) est appelée experience de Bernoulli.
Si A est l'événement succès et $\overline{A}$ est l'événement échec, on a :

$$\begin{aligned} p(A) &= p,\ 0 \leq p \leq 1; \\ p(\overline{A}) &= 1-p = q,\ 0 \leq q \leq 1. \end{aligned}$$

On dit que X suit une loi de Bernoulli de probabilité p, et on note

$$X \rightsquigarrow \text{Bernoulli}(p)$$

Espérance mathématique

La variable aléatoire X prend deux valeurs possibles $\{0; 1\}$: 0 en cas d'échec et 1 en cas de réussite et son espérance mathématique est :

$$E(X) = p.$$

En effet,

$$E(X) = \sum_{i=0}^{1} x_i p(X = x_i) = 0.q + 1.p = p.$$

Variance

La variance de cette variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli(p) est :

$$V(X) = p.q$$

En effet,

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - (E(X)^2) \\ &= \sum_{i=0}^{1} x_i^2 p(X = x_i) - (E(X)^2) \\ &= (0^2 q + 1^2 p) - p^2 \\ &= p - p^2 \\ &= p(1-p) = p.q \end{aligned}$$

Écart type

L'écart type est

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{p.q}.$$

La loi de Bernoulli(p) se résume dans le tableau 5.1 :

k	0	1		$E(X) = p$
$p(X = k)$	$p(X = 0) = q$	$p(X = 1) = p$		$V(X) = p.q$
	$0 \leq q \leq 1$	$0 \leq p \leq 1$		$\sigma(X) = \sqrt{p.q}$

TABLE 5.1 – Loi de Bernoulli(p).

Exemple 5.1. On jette un dé équilibré et on s'intéressera au résultat "avoir le chiffre 2". A : "obtenir le chiffre 2 sur la surface supérieure du dé".

$$\begin{aligned} A = \{2\} \quad &\text{et} \quad \overline{A} = \{1, 3, 4, 5, 6\}; \\ p(A) = p = \frac{1}{6} \quad &\text{et} \quad p(\overline{A}) = 1 - p = q = \frac{5}{6}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Le jet d'un dé} \quad \text{est} \quad & \text{une expérience de Bernoulli;} \\ \text{avec} \quad & p = \frac{1}{6} \text{ et } q = \frac{5}{6}; \\ & E(X) = p = \frac{1}{6}; \\ & V(X) = p.q = \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{36}; \\ & \sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{p.q} = \frac{\sqrt{5}}{6}. \end{aligned}$$

5.1.2 Loi binomiale

Soit une expérience de Bernoulli répétée n fois dans les mêmes conditions et de manières indépendantes (X_1, X_2, ... , X_n). La loi binomiale, notée $\mathcal{B}(n, p)$, $X = \sum_{i=1}^{n} X_i = X_1 + X_2 + ... + X_n$ modélise le nombre de succès obtenus lors de la répétition indépendante de plusieurs expériences aléatoires identiques (avec p la probabilité du succès et $q = 1 - p$ la probabilité de l'échec).
La variable aléatoire X correspond au nombre de succès, si on a k succès on aura $(n - k)$ échecs et la probabilité d'avoir k succès dans une experience aléatoire répétée n fois, est :

$$p(X = k) = C_n^k.p^k.q^{(n-k)},$$

avec $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$.
Il est facile de démontrer que l'on a bien une loi de probabilité, car :

$$\sum_{k=0}^{n} p(X = k) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{(n-k)} = (p + q)^n = 1, \text{ car } p + q = 1.$$

Remarque 5.1. Le développement du binôme de Newton $(p + q)^n$ permet d'obtenir l'ensemble des probabilités pour une distribution binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ avec n et p des valeurs données.

Espérance mathématique

L'espérance mathématique de la distribution binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ est :

$$E(X) = n.p$$

En effet,

$$\begin{aligned} E(X) &= E(\sum_{i=1}^{n} X_i) \text{ où chaque } X_i \text{ est une v.a. de Bernoulli} \\ &= E(X_1 + X_2 + ... + X_n) \\ &= E(X_1) + E(X_2) + ... + E(X_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} p = np. \end{aligned}$$

Variance

La variance de cette variable aléatoire qui suit une loi de binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ est :

$$V(X) = n.p.q$$

En effet,

$$\begin{aligned} V(X) &= V(\sum_{i=1}^{n} X_i) \text{ où chaque } X_i \text{ est une v.a. de Bernoulli} \\ &= V(X_1 + X_2 + ... + X_n) \\ &= V(X_1) + V(X_2) + ... + V(X_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \sum_{i=1}^{n} pq = npq. \end{aligned}$$

Écart type

L'écart type est

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{n.p.q}.$$

La loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ se résume dans le tableau 5.2 :

Réalisations	$k = 0, 1, 2, ..., n$		$E(X) = np$
Probabilité d'avoir k réussites	$p(X = k) = C_n^k.p^k.q^{(n-k)}$		$V(X) = npq$
avec	$0 \leq p \leq 1$ et $0 \leq q \leq 1$		$\sigma(X) = \sqrt{npq}$

Table 5.2 – Loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.

Exemple 5.2. On reprend l'exemple du dé et on refait l'expérience du jet 5 fois (on jette le dé 5 fois). On s'intéressera au nombre de fois, où on obtient un 2.
A : "obtenir un 2 sur la surface supérieure du dé".
$p(A) = p = \frac{1}{6}$ et $p(\overline{A}) = q = 1 - p = \frac{5}{6}$.
X suit une loi Binomiale $\mathcal{B}(n,p) = \beta(5, \frac{1}{6})$.

$$p(X = k) = C_n^k.p^k.q^{(n-k)} = C_5^k.(\frac{1}{6})^k.(\frac{5}{6})^{(5-k)}.$$

1. Quelle est la probabilité d'obtenir :
   (a) deux fois le chiffre 2 ?
   (b) au moins trois fois le chiffre 2 ?
2. Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.

Solution :

1. La probabilité d'obtenir :

(a) deux fois le chiffre 2 est :

$$p(X=2)=C_5^2(\frac{1}{6})^2(\frac{5}{6})^{(5-2)}=10\times 0,028\times 0,58=0,16.$$

(b) au moins trois fois le chiffre 2 est :

$$\begin{aligned} p(X\geq 3) &= p(X=3)+p(X=4)+p(X=5)\\ &= 1-p(X<3)\\ &= 1-[p(X=0)+p(X=1)+p(X=2)]\\ &= 1-[C_5^0(\frac{1}{6})^0(\frac{5}{6})^{(5-0)}+C_5^1(\frac{1}{6})^1(\frac{5}{6})^{(5-1)}+C_5^2(\frac{1}{6})^2(\frac{5}{6})^{(5-2)}]\\ &= 1-[0,4+0,4+0,16]=0,036. \end{aligned}$$

2. Calcul de $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$:

$$\begin{aligned} E(X) &= np=5\times\frac{1}{6}=\frac{5}{6}.\\ V(X) &= npq=5\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{25}{36}.\\ \sigma(X) &= \sqrt{V(X)}=\frac{5}{6}. \end{aligned}$$

Théorème 5.1. *Si $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(n,p)$ et $Y \rightsquigarrow \mathcal{B}(m,p)$ sont deux variables aléatoires indépendantes de même probabilité p, alors leurs somme $X+Y$ est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale :*

$$X+Y\rightsquigarrow\mathcal{B}(n+m,p).$$

5.1.3 Loi de Poisson

On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi de poisson (appelée aussi loi des événements rares ou de petits nombres) de paramètre réel λ, notée $\mathcal{P}(\lambda)$, si elle prend des valeurs entières dont les probabilités de réalisation sont :

$$\forall k\in\mathbb{N},\ p(X=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!},\ e=2,718...$$

Paramètres de la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$:

Espérance mathématique : $E(X)=\lambda$.
Variance : $V(X)=\lambda$.
Écart type : $\sigma(X)=\sqrt{\lambda}$.

Exemple 5.3. Une centrale téléphonique reçoit en moyenne 300 appels par heure. Quelle est la probabilité que durant une minute, la centrale reçoit exactement deux appels ?
Solution :
Les appels dans cette centrale suivent une loi de poisson de paramètre $\lambda = \frac{300}{60} = 5$ appels par minutes en moyenne.

$$\begin{aligned} p(X = 2) &= e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-5}\frac{5^2}{2!} \\ &= 0,08422. \end{aligned}$$

5.1.4 Table de la loi de Poisson

A l'intersection de la colonne λ et de la ligne k, figure la probabilité pour que la variable de Poisson Y de paramètre λ soit égale à la valeur entière k : $p(Y = k) = e^{-\lambda}.\frac{\lambda^k}{k!}$

Probabilités individuelles $P_\lambda(k) = P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$

k \ λ	0,02	0,04	0,06	0,08	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5	1	1,5	2	2,5	3	4	5
0	0,980	0,961	0,942	0,923	0,905	0,861	0,819	0,779	0,741	0,705	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
1	0,020	0,038	0,057	0,074	0,090	0,129	0,164	0,195	0,222	0,247	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
2	0,000	0,001	0,002	0,003	0,005	0,010	0,016	0,024	0,033	0,043	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
3	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,001	0,002	0,003	0,005	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
4	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
5	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
6	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
7	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
8	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
9	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
10	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
11	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
12	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
13	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
14	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

FIGURE 5.1 – Table de la loi de Poisson.

Exemple 5.4. Sur une autoroute, il y a en moyenne deux accidents par semaine.
Quelle est la probabilité qu'il y aura cinq accidents durant un week-end ?
Solution : La loi de X du nombre d'accidents sur cette route suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 2$ et la probabilité qu'il y aura cinq accidents durant un week-end est

$$p(X = 5) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-2}\frac{2^5}{5!} = 0,0361.$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0	0,368	0,135	0,050	0,018																
1	0,368	0,271	0,149	0,073	0,034	0,015														
2	0,184	0,271	0,224	0,147	0,084	0,045	0,022	0,011												
3	0,061	0,180	0,224	0,195	0,140	0,089	0,052	0,029	0,015											
4	0,015	0,090	0,168	0,195	0,175	0,134	0,091	0,057	0,034	0,019	0,010									
5		0,036	0,101	0,156	0,175	0,161	0,128	0,092	0,061	0,038	0,022	0,013								
6		0,012	0,050	0,104	0,146	0,161	0,149	0,122	0,091	0,063	0,041	0,025	0,015							
7			0,022	0,060	0,104	0,138	0,149	0,140	0,117	0,090	0,065	0,044	0,028	0,017	0,010					
8				0,030	0,065	0,103	0,130	0,140	0,132	0,113	0,089	0,066	0,046	0,030	0,019	0,012				
9				0,013	0,036	0,069	0,101	0,124	0,132	0,125	0,109	0,087	0,066	0,047	0,032	0,021	0,014			
10					0,018	0,041	0,071	0,099	0,119	0,125	0,119	0,105	0,086	0,066	0,049	0,034	0,023	0,015		
11						0,023	0,045	0,072	0,097	0,114	0,119	0,114	0,101	0,084	0,066	0,050	0,036	0,025	0,016	0,011
12						0,011	0,026	0,048	0,073	0,095	0,109	0,114	0,110	0,098	0,083	0,066	0,050	0,037	0,026	0,018
13							0,014	0,030	0,050	0,073	0,093	0,106	0,110	0,106	0,096	0,081	0,066	0,051	0,038	0,027
14								0,017	0,032	0,052	0,073	0,090	0,102	0,106	0,102	0,093	0,080	0,065	0,051	0,039
15									0,019	0,035	0,053	0,072	0,088	0,099	0,102	0,099	0,091	0,079	0,065	0,052
16									0,011	0,022	0,037	0,054	0,072	0,087	0,096	0,099	0,096	0,088	0,077	0,065
17										0,013	0,024	0,038	0,055	0,071	0,085	0,093	0,096	0,094	0,086	0,076
18											0,015	0,026	0,040	0,055	0,071	0,083	0,091	0,094	0,091	0,084
19												0,016	0,027	0,041	0,056	0,070	0,081	0,089	0,091	0,089
20													0,018	0,029	0,042	0,056	0,069	0,080	0,087	0,089
21													0,011	0,019	0,030	0,043	0,056	0,068	0,078	0,085
22														0,012	0,020	0,031	0,043	0,056	0,068	0,077
23															0,013	0,022	0,032	0,044	0,056	0,067
24																0,014	0,023	0,033	0,044	0,056
25																	0,015	0,024	0,034	0,045
26																	0,010	0,016	0,025	0,034
27																		0,011	0,017	0,025
28																			0,012	0,018
29																				0,013
30																				

FIGURE 5.2 – Table de la loi de Poisson pour k variant de 0 à 30.

5.1.5 L'approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson

Considérons une variable aléatoire X suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$. Si n tend vers l'infini et p tend vers 0 ($n \to +\infty$ et $p \to 0$), la loi binomiale converge vers une loi de Poisson.
En pratique, si $n > 25$ et $np < 5$, alors la loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$ est approchée par la loi de poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, avec $\lambda = np$.

Exemple 5.5. Des observations ont montré que la probabilité qu'un homme soit atteint d'une maladie M est $p = 0,1$. En considérant 40 hommes pris au hasard, soit k le nombre d'hommes touchés par la maladie et X la variable aléatoire qui compte le nombre d'hommes malades.

1. Quelle est la loi que suit la v.a. X ? Donner sa loi de distribution $p(X = k)$.
2. Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.
3. Par quelle loi peut-on approcher la loi de X ?
4. Calculer $p(X = 2)$ et $p(X = 5)$.

Solution :

1. X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(40; 0.1)$:
$$p(X = k) = C_{40}^{k}.(\frac{1}{10})^{k}.(\frac{9}{10})^{(40-k)}$$
2. Calcul de $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$:
$$\begin{aligned} E(X) &= np = 40 \times \frac{1}{10} = 4. \\ V(X) &= npq = 40 \times \frac{1}{10} \times \frac{9}{10} = 3,6. \\ \sigma(X) &= \sqrt{V(X)} = 1,89. \end{aligned}$$
3. Cette loi binomiale $\mathcal{B}(40; 0.1)$ est approchée par une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$:
$$(n = 40 > 25 \text{ et } np = 4 < 5) \Rightarrow \text{Binomiale } \mathcal{B}(40; 0.1) \rightsquigarrow \text{ Poisson } \mathcal{P}(\lambda), \lambda = np = 4.$$
$$p(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-4}\frac{4^k}{k!}.$$
4. Calcul de $p(X = 2)$ et $p(X = 5)$:
$$p(X = 2) = e^{-4}\frac{4^2}{2!} = 0,14653.$$
$$p(X = 5) = e^{-4}\frac{4^5}{5!} = 0,15629.$$

5.2 Lois de probabilités continues

5.2.1 Loi Normale

En théorie des probabilités et en statistique, la loi normale est l'une des lois de probabilité les plus adaptées pour modéliser des phénomènes naturels issus de plusieurs événements aléatoires. Elle est en lien avec de nombreux objets mathématiques dont le mouvement brownien, le bruit blanc gaussien ou d'autres lois de probabilité. Elle est également appelée loi gaussienne, loi de Gauss ou loi de Laplace-Gauss des noms de Laplace (1749-1827) et Gauss (1777-1855), deux mathématiciens, astronomes et physiciens qui l'ont étudiée.

Soit X une variable aléatoire. On dit que X suit une loi normale ou Laplace-Gauss de paramètres m (ou μ) et σ ($m \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$), si sa densité de probabilité est définie par :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2}(\frac{x-m}{\sigma})^2},$$

avec $x \in \mathbb{R}$, $E(X) = m$ et σ est l'écart type de la v.a. X.

La courbe de cette densité de probabilité est appelée courbe de Gauss ou courbe en cloche. La figure 5.3 donne une illustration de quelque densités de probabilités en variant leurs paramètres correspondants (m et σ) et l'aire sous la courbe est toujours égale à 1.

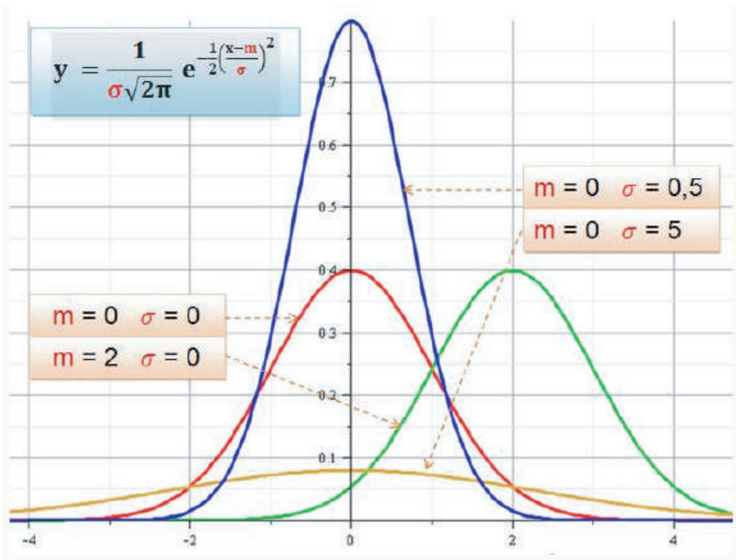
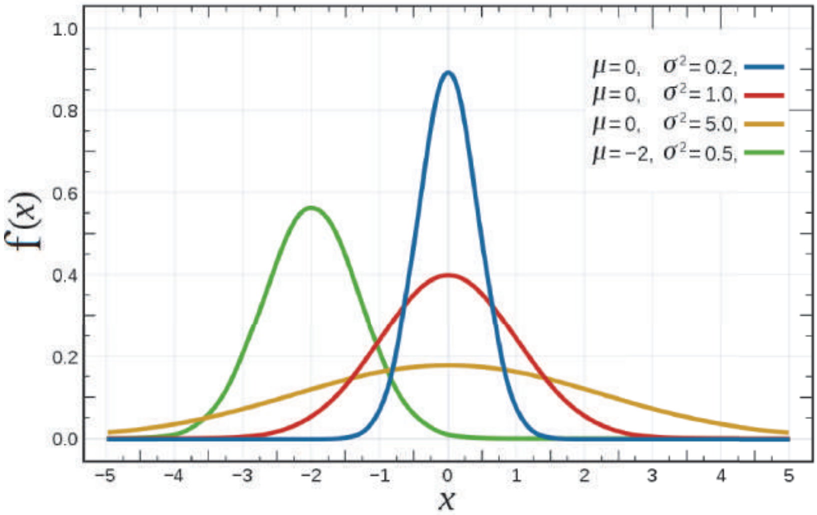


FIGURE 5.3 – Illustration de lois normales avec variations de m et σ.

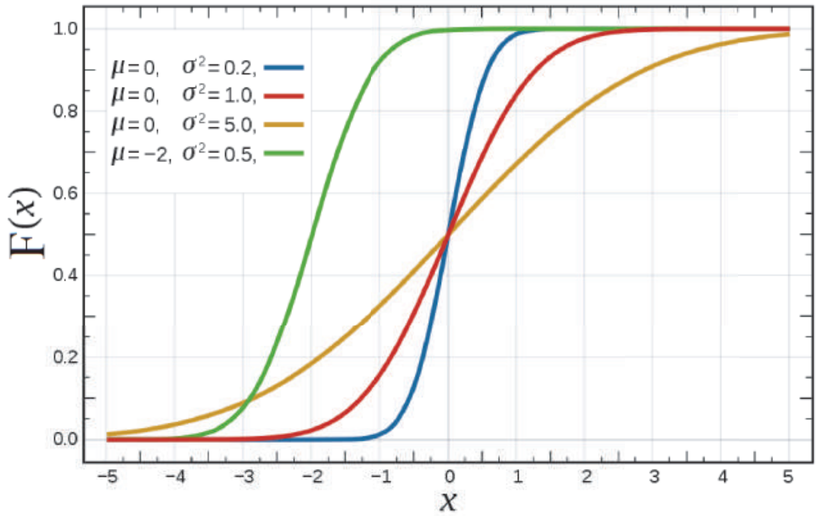
Fonction de répartition

La fonction de répartition F de la loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$ est :

$$F(x) = p(X \leq x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-1}{2}(\frac{t-m}{\sigma})^2} dt.$$



(a) Densités de probabilités



(b) Fonctions de répartitions

FIGURE 5.4 – Fonctions de répartition de la loi Normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ avec variation des paramètres μ et σ. La courbe en couleur rouge est associée à la loi Normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.

5.2.2 Loi Normale centrée réduite

Dans la pratique, on rencontre très souvent la loi normale. Afin d'éviter le calcul numérique de la fonction de répartition pour chaque application, on utilisera la loi normale centrée réduite, dont les valeurs existent et sont tablées.

Définition 5.1. Variable aléatoire centrée réduite

1. Une variable aléatoire centrée est une v.a. dont l'espérance est nulle $E(X) = 0$.
2. Une variable aléatoire réduite est une v.a. dont l'écart type $\sigma(X) = 1$ $(V(X) = 1)$.
3. La variable aléatoire $\frac{X-E(X)}{\sigma(X)}$ est une v.a. centrée réduite.
   En effet,

$$\begin{aligned} E(\frac{X-E(X)}{\sigma(X)}) &= \frac{1}{\sigma(X)}(E(X)-E(X)) = 0; \\ V(\frac{X-E(X)}{\sigma(X)}) &= \frac{1}{\sigma^2(X)}(V(X)) = \frac{\sigma^2(X)}{\sigma^2(X)} = 1. \end{aligned}$$

Théorème 5.2. *Soit X une variable aléatoire continue suivant une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$. Si on applique le changement de variable $Z = \frac{X-m}{\sigma}$ et le changement de bornes correspondantes $z = \frac{x-m}{\sigma}$, on a :*

$$F_X(x) = p(X \leq x) = p(\frac{X-m}{\sigma} \leq \frac{x-m}{\sigma}) = p(Z \leq z) = F_Z(z).$$

La variable aléatoire Z suit une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.

$$\textit{Si } X \rightsquigarrow \mathcal{N}(m, \sigma) \textit{ alors } Z = \frac{X-m}{\sigma} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1).$$

Densité de probabilité de Z

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2}z^2}, \; z \in \mathbb{R}.$$

Fonction de répartition de Z

$$F_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{\frac{-1}{2}t^2} dt.$$

Propriété 5.1. *Si la variable aléatoire Z suit une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$, alors :*

1. $f(z) = f(-z)$ *;*

2. $\int_{-\infty}^{0} f(t)dt = \int_{0}^{+\infty} f(t)dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \frac{1}{2}$ *;*

3. $\forall z \in \mathbb{R}_+$*, on a* $\int_{-\infty}^{-z} f(t)dt = \int_{z}^{+\infty} f(t)dt$ *;*

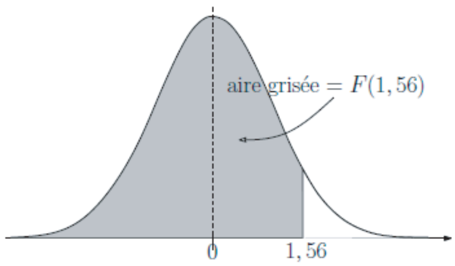
4. $\forall z \in \mathbb{R}_+$*, on a* $F_Z(-z) = 1 - F_Z(z)$*.*

Exemple 5.6. On suppose qu'une certaine variable aléatoire Z suit une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$.

1. Pour quelle proportion d'individus on a $Z \leq 1,56$?
2. Pour quelle proportion d'individus on a $Z \geq 1,49$?
3. Calculer $p(Z \leq -1,1)$.

Solution

1. Calcul de $p(Z \leq 1,56)$:



La valeur de $p(Z \leq 1,56) = F(1,56)$ sera déduite à partir de la table de la loi normale centrée réduite ; pour cela on cherche 1,56 dans la table :
Donc $p(Z \leq 1,56) = 0,9406$.

	...	0.06	...
$\vdots$		$\vdots$	
1,5	...	0,9406	...
$\vdots$			

Pour 94,06% des individus, la variable aléatoire Z est inférieure à 1,56.

2. Calcul de $p(Z \geq 1,49)$:

$$\begin{aligned} p(Z \geq 1,49) &= 1 - p(Z \leq 1,49) \\ &= 1 - F(1,49). \end{aligned}$$

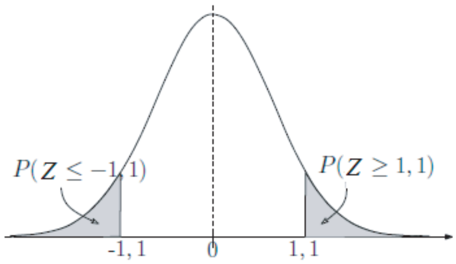
On cherche 1,49 dans la table :
Donc $p(Z \leq 1,49) = 0,9319$, alors $p(Z \geq 1,49) = 1 - 0,9319 = 0,0681$.

	...	...	0.09
$\vdots$			$\vdots$
$1,4$	...	...	$0,9319$
$\vdots$			

3. Si de plus on veut connaître $p(1,49 \leq Z \leq 1,56$, alors :

$$\begin{aligned} p(1,49 \leq Z \leq 1,56 &= F(1,56) - F(1,49) \\ &= 0,9406 - 0,9319 = 0,0087. \end{aligned}$$

4. On cherche $p(Z \leq -1.1)$, c'est-à-dire $F(-1,1)$.



On sait que $p(Z \leq -1.1) = F(-1,1) = 1 - F(1,1) = 1 - 0,8643 = 0,1357$.
Autrement dit, $p(Z \leq -1,1) = p(Z \geq 1,1) = 1 - 0,8643 = 0,1357$.

Exemple 5.7. Soit X une variable aléatoire continue suivant une loi normale d'une moyenne $m = 2$ et d'un écart type $\sigma = 0,16$.
Quelle est la probabilité d'avoir $1,94 \leq X \leq 2,02$?
Solution

$$X \rightsquigarrow \mathcal{N}(2; 0.16) \Rightarrow Z \rightsquigarrow \mathcal{N}(0; 1)$$

$$\begin{aligned} p(1,94 \leq X \leq 2,02) &= p(\frac{1,94-2}{0,16} \leq Z \leq \frac{2,02-2}{0,16}) \\ &= p(-0,375 \leq Z \leq 0,125) \\ &= p(Z \leq 0,125) - p(Z \leq -0,375) \\ &= F_Z(0,125) - F_Z(-0,375) = F_Z(0,125) - [1 - F_Z(0,375)] \\ &= 0,5497 - [1 - 0,6462] = 0,1959. \end{aligned}$$

5.2.3 L'approximation de la loi binomiale par une loi de normale

Théorème 5.3. *Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p, i.e. $\mathcal{B}(n;p)$, alors*

$$p(X=k) \simeq \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2}(\frac{k-m}{\sigma})^2} \ \textit{quand } n \to +\infty, \ \textit{c'est à dire } \mathcal{N}(m;\sigma),$$

avec $m = E(X) = n.p$ *et* $\sigma^2 = V(X) = n.p.q$, *avec* $q = 1 - p$.

Remarque 5.2. On considère que l'approximation est valable si pour $n > 25$, on a à la fois $np > 5$ et $nq > 5$.

En résumé, on a :

$$\begin{array}{lll} \text{Si } n > 25, & & \\ \quad np > 5, & \text{alors la loi binomiale } \mathcal{B}(n;p) \rightsquigarrow & \text{loi Normale } \mathcal{N}(m;\sigma) \\ \quad nq > 5, & & \text{avec } m = np \text{ et } \sigma = \sqrt{n.p.q}. \end{array}$$

Exemple 5.8. Reprenons l'exemple 5.5, en considérant 100 hommes au lieu de 40. rappelons que la probabilité qu'un homme soit atteint d'une maladie M est $p = 0,1$ et la probabilité qu'il ne soit pas atteint de cette maladie est $q = 1 - p = 0,9$. Soit k le nombre d'hommes touchés par la maladie et X la variable aléatoire qui compte le nombre d'hommes malades.

1. Quelle est la loi que suit la v.a. X ? Donner sa loi de distribution $p(X = k)$.
2. Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.
3. Par quelle loi peut-on approcher la loi de X ?
4. Calculer $p(X \leq 2)$ et $p(2 \leq X \leq 10)$.

Solution :

1. X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(100; 0.1)$:

$$p(X = k) = C_{100}^{k}.(0,1)^k.(0,9)^{(100-k)}$$

2. Calcul de $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$:

$$\begin{aligned} E(X) &= np = 100 \times 0,1 = 10. \\ V(X) &= npq = 100 \times 0,1 \times 0,9 = 9. \\ \sigma(X) &= \sqrt{V(X)} = 3. \end{aligned}$$

3. Cette loi binomiale $\mathcal{B}(100; 0.1)$ est approchée par une loi de normale $\mathcal{N}(m;\sigma)$:

$$(n = 100 > 25, \ np = 10 > 5 \text{ et } nq = 90 > 5\ ) \Rightarrow \text{binomiale } \mathcal{B}(100;0.1) \rightsquigarrow \text{ normale } \mathcal{N}(m,\sigma),$$

avec $m = np = 10$ et $\sigma = \sqrt{n.p.q} = 3$.

$$p(X = k) \simeq \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2}(\frac{k-m}{\sigma})^2} = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2}(\frac{k-10}{3})^2}.$$

4. Calcul de $p(X \leq 2)$ et $p(2 \leq X \leq 10)$:

$$\begin{aligned} p(X \leq 2) &= p(\frac{X-m}{\sigma} \leq \frac{2-m}{\sigma}) = p(\frac{X-10}{3} \leq \frac{2-10}{3}) \\ &= p(Z \leq \frac{-8}{3}) = F(\frac{-8}{3}) \text{ où } Z \text{ est la loi normale centrée réduite} \\ &= 1 - F(\frac{8}{3}) = 1 - F(2,66666) \\ &\simeq 1 - 0,980... \simeq 0,02. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(2 \leq X \leq 10) &= p(\frac{2-m}{\sigma} \leq \frac{X-m}{\sigma} \leq \frac{10-m}{\sigma}) = p(\frac{2-10}{3} \leq Z \leq \frac{10-10}{3}) \\ &= p(Z \leq \frac{10-10}{3}) - p(Z \leq \frac{2-10}{3}) = p(Z \leq \frac{0}{3}) - p(Z \leq \frac{-8}{3}) \\ &= F(0) - F(\frac{-8}{3}) = F(0) - [1 - F(\frac{8}{3})] \\ &= F(0) - [1 - F(2,66666)] \simeq 0,5 - [1 - 0,980...] \\ &\simeq 0,5 - 0,02 = 0,48. \end{aligned}$$

Remarque. Les valeurs de $F(2,66666)$ et $F(0)$ sont déduites de la table de la loi normale centrée réduite.

5.2.4 L'approximation de la loi de Poisson par une loi normale

Lorsque le paramètre λ d'une loi de Poisson est grand, la loi de Poisson peut être approchée par une loi normale d'espérance λ et de variance λ. Le principe est analogue a celui utilisé pour l'approximation de la loi binomiale par la loi normale.

Théorème 5.4. *Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ, alors*

$$p(X = k) \simeq \frac{1}{\sqrt{\lambda}\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2}(\frac{k-\lambda}{\sqrt{\lambda}})^2} \text{ quand } n \to +\infty,$$

avec $E(X) = \lambda$ et $V(X) = \lambda$.

Remarque 5.3. On considère que l'approximation est valable si $\lambda > 20$.

Si $\lambda > 20$, alors la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ est approchée par la loi normale $\mathcal{N}(\lambda; \sqrt{\lambda})$.

5.2.5 Table de la loi normale centrée réduite

$$F(t) = P(X \leq t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \text{ et } F(-t) = 1 - F(t).$$

t	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Utilisation : On lit les décimales dans les lignes et les centièmes en colonnes.
Par exemple, la valeur de $F(1.54)$ se trouve à l'intersection de la ligne 1.5 et de la colonne 0.04 et on trouve $F(1.54) = 0.9382$ à 10^{-4} près.

Bibliographie

[1] A. Ayache and J. Hamonier. *Cours : Statistique Descriptive et Calcul de Probabilités*. Université de Lille. France, 2014.

[2] R. Balan and G. Lamothe. *Une introduction à la biostatistique*. Presses de l'Université du Québec, 2012.

[3] F. Carrat and A. Mallet. *Biostatistique*. Faculté médecine-Université Pierre et Marie Curie, 2013.

[4] M. Colin and G. Payette. *Biostatistiques pour les techniques biologiques*. Montréal, Québec, 3ème edition, 2004.

[5] J.P. Lecoutre. *Statistique et probabilités - Cours et exercices corrigés*. Dunod, 2012.

[6] D. Meghlaoui. *Introduction à la Statistique Descriptive*. Ecole Préparatoire en Sciences Economiques Commerciales et des Sciences de Gestion de Constantine, 2010.

[7] M. MERCIER. *Biostatistique et probabilités*. Ellipses, 2011.

[8] V. Morice and A. Mallet. *QCM corrigées et commentées de Biostatistique*. Ellipses, 2012.

[9] H. Mzali. *Cours : Staitistique et calcul de probabilité*. Ecole Natianale de l'Adminstration. Tunis, 2013.

[10] X. Nogues, A. Garenne, X. Bouteiller, and V. Fiévet. *Le cours de Biostatistique*. Collection tout en fiches : Dunod, 2018.

[11] A. Ruegg. *Probabilités et Statistique*. Presses Polytechniques et universitaires romandes. Suisse, 4ème edition, 1994.

[12] B. Scherrer. *Biostatistique*, volume 1. Gaetan Morin, 2ème edition, Novembre 2008.

[13] B. Scherrer. *Biostatistique*, volume 2. Gaetan Morin, 2ème edition, Mai 2009.

[14] C. Suquet. *Introduction au calcul de probabilités*. Université des Sciences et Technologies de Lille U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées. France, 2003.