ملخص حول المعادلات التفاضلية

1.1 تعاريف عامة

تعريف (المعادلة التفاضلية) : نسمي معادلة تفاضلية كل معادلة تربط بين المتغير المستقل x والدالة المجهولة y(x) (اختصارًا نكتبها y) ومشتقاتها من مختلف الرتب y', y'',........

أ) المعادلات التفاضلية العادية : تسمى المعادلة التفاضلية بمعادلة تفاضلية عادية إذا كانت الدالة المجهولة تعتمد على متغير مستقل واحد.

ب) المعادلات التفاضلية الجزئية : تسمى المعادلة التفاضلية بمعادلة تفاضلية جزئية إذا كانت الدالة المجهولة

أمثلة (1-1) :-

العلاقات التالية تمثل معادلات تفاضلية عادية .

$$(1)\ \ \frac{dy}{dx} + y = 3x^2$$

$$(2)\ \ x\frac{d^3y}{dx^3} + (2\sin x)\frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{dy}{dx} = (3 - x^2)\,y$$

إذا كانت المشتقة النونية $y^{(n)}$ هي أعلى مشتقة تظهر بالمعادلة التفاضلية العادية ، قيل أن هذه المعادلة من **الرتبة** n (تتحدد رتبة المعادلة التفاضلية بأعلى مشتقة داخلة فيها) .

من الأمثلة السابقة (1-1) :

المعادلة التفاضلية (1) هي معادلة تفاضلية عادية من الرتبة الأولى .

المعادلة التفاضلية (2) هي معادلة تفاضلية عادية من الرتبة الثالثة .

مثال (1- 3) :-

أثبت أن $y(x) = c\sin x$ حلاً للمعادلة $y'' + y = 0$ حيث c ثابت إختياري .

الحل :

$$y(x) = c\sin x$$
$$y'(x) = c\cos x$$
$$y''(x) = -c\sin x$$

وعلى ذلك نجد أن :

$$y''(x) + y = -c\sin x + c\sin x = 0$$

تعريف 2:

رتبة المعادلة التفاضلية هي أعلى رتبة لمشتقة دالة موجودة في هذه المعادلة.

ملاحظة: حل المعادلات التفاضلية هو إيجاد دوال تحقق مع مشتقاتها هذه المعادلات.

تعريف (الحل الصريح) : الحل الصريح لمعادلة تفاضلية هو كل حل على الشكل التالي

$$y = f(x) + c$$

حيث : c ثابت حقيقي اختياري.

تعريف (الحل الضمني) : الحل الضمني لمعادلة تفاضلية هو عبارة عن علاقة بين المتغير المستقل x و الدالة المجهولة yأي : G(x ,y)=0 ينتج عن اشتقاقها ضمنيا المعادلة التفاضلية الأصلية.

معادلات تفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى

طريقة فصل المتغيرات

تعريف : نسمي معادلة تفاضلية ذات متغيرات منفصلة كل معادلة يُمكن جعلها على الشكل

$$f(x)dx + g(y)dy = 0$$

طريقة حلها :

لحلها نكامل الطرفين : $\int f(x)dx + \int g(y)dy = c$ حيث c ثابت اختياري.

مثال: 1) لنحل المعادلة التفاضلية : $y' - 3x^2 y = 0$

$$\frac{dy}{dx} - 3x^2 y = 0$$
$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3x^2 y$$
$$\Rightarrow \frac{dy}{y} = 3x^2 dx$$
$$\Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int 3x^2 dx$$
$$\Rightarrow \ln|y| = x^3 + c$$
$$\Rightarrow |y| = e^{x^3 + c}$$
$$\Rightarrow y = e^{x^3} e^{c} = c' e^{x^3} \ / c' \in \mathbb{R}$$

أولا. المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية المتجانسة

تعريف : المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة الثانية هي كل معادلة من الشكل

$$ay'' + by' + cy = 0 ....(E)$$

حيث c, b, a أعداد حقيقية ثابتة.

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

(نسميها بالمعادلة المميزة للمعادلة (E)).

طريقة الحل : إن حل المعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية المتجانسة مرتبط بطبيعة جذور المعادلة المميزة لها، نميز ثلاث حالات :

1. عندما $\Delta > 0$ حيث ($\Delta = b^2 - 4ac$) فالمعادلة في هذه الحالة لها جذران متمايزان و ليكنا λ_2, λ_1 فإن الحل العام لها هو

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

حيث c_2, c_1 ثابتان اختياريان.

2. عندما $\Delta = 0$ فالمعادلة لها حل مضاعف وليكن λ فالحل العام هو

$$y(x) = (c_1 + c_2 x) e^{\lambda x}$$

مثال

أوجد الحل العام للمعادلة :

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

المعادلة المميزة

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

وتكون جذورها : $\lambda_1 = 2 \ , \ \lambda_2 = 2$

ويكون الحل العام :

$$y = (c_1 + c_2 x) e^{2x}$$

ثانيا. المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية غير المتجانسة

تعريف : المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة الثانية هي كل معادلة من الشكل

$$ay'' + by' + cy = f(x) \ldots\ldots\ldots\ldots (E')$$

حيث c, b, a أعداد حقيقية ثابتة، مع $f(x) \neq 0$.

الحل العام لها هو : $y_g = y_h + y_p$ حيث y_h حل المعادلة المتجانسة $ay'' + by' + cy = 0$

و y_p حل خاص للمعادلة : $ay'' + by' + cy = f(x)$

طريقة تعيين الحل الخاص y_p مع $f(x)$ كثير حدود درجته n.

إذا كان $c \neq 0$ نأخذ $y_p = g(x)$ حيث $\deg(g(x)) = n$

إذا كان $c = 0, \ b \neq 0$ نأخذ $y_p = g(x)$ حيث $\deg(g(x)) = n + 1$

إذا كان $b = c = 0$ نأخذ $y_p = g(x)$ حيث $\deg(g(x)) = n + 2$

الحل : معلوم أن الحل العام للمعادلة المتجانسة $y''+2y'=0$ هو $y_h=c_1+c_2e^{-2x}$ ، إن الحل الخاص يأخذ الشكل التالي : $y_p=Q_n(x)x^r$ حيث $n=1,r=1$ إذن $y_p=(ax+b)x$ وبالإشتقاق والتعويض نجد $b=\frac{1}{2},a=\frac{1}{4}$ ومنه يصبح $y_p=\left(\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}\right)x$ و عليه فإن الحل العام لهذه المعادلة هو

$$y=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+c_1+c_2e^{-2x}$$

الشروط الإبتدائية

في بعض مسائل المعادلات التفاضلية العادية تُعطى بعض الشروط التي يجب أن تتحقق بحل المعادلة التفاضلية العادية ، وهذه الشروط هي التي تمكننا من تحديد الثوابت الإختيارية التي تظهر في الحل العام نتيجةً لعمليات التكامل المستخدمة لإيجاد الحل العام .

مثال

$$y''=x \ , \ y(0)=1 \ , \ y'(0)=-1$$

الحل :

بإجراء التكامل مرتين نتحصل على :

$$y=\frac{1}{6}x^3+c_1x+c_2$$

وهو الحل العام للمعادلة المُعطاة .

حيث :

$$y'=\frac{1}{2}x^2+c_1$$

بالتعويض في الشروط الإبتدائية :

$$y'(0)=-1 \ \Rightarrow c_1=-1$$

$$y(0)=1 \ \Rightarrow c_2=1$$