REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UniversitéLarbi Ben M’hidi, Oum El Bouaghi

Faculté des Sciences Exactes et Sciences de la Nature et de la Vie
Département des Mathématiques et Informatique

Polycopié de Cours

Intitulé

Introduction Aux Statistiques Descriptive EtProbabilités

PréparéPar

Dr. Adel Ouannas

Table des matières

Avant-propos

Ce document est un ensemble de polycopie contenant des cours de statistique et probabilités. Ces cours ont été présentés pour le niveau de première année mathématiques et informatique à la faculté des sciences exactes et sciences de la nature et de la vie, université de Tébessa au cours de l'année universitaire 2015-2016.

Se référant au programme ministériel le contenu cognitif est réparti selon la façon qui suit :
- le premier chapitre : nous présentons quelques terminologies statistiques élémentaires.
- dans les chapitres deux et trois, nous abordons la représentation graphiques et numériques des donnés statistiques.
- le quatrième chapitre est consacré à l'analyse combinatoire qui est considéré comme préambule de la théorie des probabilités.
- Concernant les chapitres Cinque et six, nous étudions les axes les plus importants de la théorie des probabilités qui sont : les espaces probabilisables et les espaces probabilisés.
- nous achevons nos cours par le biais du septième chapitre qui traite les notion des probabilités conditionnelles et indépendance.

Le polycopie est annexé par les diverses références essentielles sur lequelles on s'est basé pour élaborer ces cours.

A la fin, nous remercions chaleureusement les responsables du département MI pour leurs efforts pédagogiques et matériels qui nous ont été d'une grande aide. Ainsi que nous remercions le Président et les membres du comité scientifique du département MI quant aux conseils directives qui nous ont été présentés pour la réalisation de ce polycopié.

Chapitre 1

Vocabulaire statistique et notions de base

1- Vocabulaire statistique
2- Notions de base

1.1 Vocabulaire statistique

1.1.1 Population

Définition 1.1 *C'est l'ensemble que l'on observe et qui sera soumis à une analyse statistique.*

Exemple 1.1 *Les véhicules automobiles immatriculés en Algérie, les salariés d'une entreprise et les habitants d'un quartier.*

1.1.2 Individu

Définition 1.2 *L'individu (ou unité statistique) c'est l'élément de base constitutif de la population à laquelle il appartient.*

Exemple 1.2 *Une automobile, un logement, une vache, une ampoule, une ville, etc...*

1.1.3 Echantillon

Définition 1.3 *C'est un sous ensemble de la population considérée. Le nombre d'individus dans l'échantillon est la taille de l'échantillon.*

1.1.4 Caractère

Définition 1.4 *C'est la propriété ou l'aspect singulier que l'on se propose d'observer dans la population ou l'échantillon. Un caractère qui fait le sujet d'une étude porte aussi le nom de variable statistique.*

Exemple 1.3 *Une étude sur les étudiants de l'université de Tébéssa peut porter sur les différentes variables : leur âge, leur sexe, leur nationalité, leur moyenne de l'année, etc...*

1.1.5 Effectif

Définition 1.5 *L'effectif* (n_i) *d'une valeur donnée d'une variable* (x_i) *est l'ensemble d'individus présentant cette valeur.*

Remarque 1.1 *L'effectif total est la somme de tous les effectifs :* $\sum_{i=1}^{k} n_i = N$

1.1.6 Série statistique

Définition 1.6 *Une séries statistique est la suite des observations d'une variable, relevées sur les individus d'une population.*

1.2 Notions de base

1.2.1 Fréquence

Définition 1.7 *La fréquence d'observation de x_i, $i = 1, 2, ..., k$, est le rapport entre le nombre de fois où x_i est observé et le nombre total d'observations :*

$$f_i = \frac{n_i}{N}.$$

Remarque 1.2 ▶ $f_i \in [0, 1]$,
▶ $\sum_{j=1}^{k} f_j = \sum_{j=1}^{k} \frac{n_j}{N} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{k} n_j = 1$
▶ f_i *représente le pourcentage d'observations égales à* x_i.

1.2.2 Effectifs cumulés

Définition 1.8 *Quand les modalités ou les classes d'une variable sont rangées dans l'ordre croissant (décroissant), les effectifs cumulés croissants (ou décroissants) d'une valeur s'obtiennent en ajoutant à chaque effectif les effectifs des valeurs qui la précédent.*

$$N_i = \sum_{j=1}^{i} n_j.$$

Remarque 1.3 ▶ $\sum_{j=1}^{i} N_j = N$

1.2.3 Fréquences cumulées

Définition 1.9 *Les fréquences cumulées s'obtiennent en divisant les effectifs cumulés par l'effectif total.*

$$F_i = \frac{N_i}{N}.$$

Remarque 1.4 ▶ *On peut écrire aussi :* $F_i = \sum_{j=1}^{i} f_j$
▶ $\sum_{j=1}^{k} F_j = 1$

1.2.4 Types de variables

Variable qualitative

La variable est dite qualitative quand les modalités sont des catégories.
– **Variable qualitative nominale** : La variable est dite qualitative nominale quand les modalités ne peuvent pas être ordonnées (ex : sexe, état matrimonial, couleur des yeux).
– **Variable qualitative ordinale** : La variable est dite qualitative ordinale quand les modalités peuvent être ordonnées (ex : mention au bac, niveau d'études, seuil de gravité d'une maladie).

Variable quantitative

Lorsque la variable peut être exprimée numériquement, elle est dite quantitative.
– **Variables quantitatives discrètes** : elles ne peuvent prendre que des valeurs entières (ex : nombre d'enfants dans le foyer, nombre de jours de congé).
Nombre d'enfants

Valeur	Effectif	Fréquence	Fréq. Cumulée Croissante
Val_1	n_1	f_1	F_1
...	...	...	...
Val_p	n_p	f_p	F_p

d'où n_i est le nombre d'individus prenant la valeur i et $F_i = \sum_{j=1}^{i} f_j$ est la proportion d'individus dont les valeurs sont inférieures ou égale à la îéme valeur Val_i
– **Variables quantitatives continues** : Elles peuvent prendre des valeurs réelles quelconques (ex : âge, température, poids) . Elles peuvent être regroupées en classes ou non. Mais quand elles le

sont, les données sont représentées dans un tableau du type :

Classe	Centre	Effectif	Fréquence	Fréq. Cum. Croissante
$[a_1, a_2[$	$\frac{a_1+a_2}{2}$	n_1	f_1	F_1
...	...	...	...	...
$[a_p, a_{p+1}[$	$\frac{a_p+a_{p+1}}{2}$	n_p	f_p	F_p

L'amplitude de la classe i est sa longueur : $a_{i+1} - a_i$.

Chapitre 2

Représentations graphiques des données

Les représentations sont très nombreuses et dépendent de la nature des données. Dans tous les cas on représente pour chaque modalité de la variable un effectif ou une fréquence.

2.1 Cas de variables qualitatives

Pour un caractère qualitatif, on utilise principalement trois types de représentation graphique :

2.1.1 Représentation circulaire

Les diagrammes circulaires, ou semi-circulaires, consistent à partager un disque ou un demi-disque, en tranches, ou secteurs, correspondant aux modalités observées et dont la surface est proportionnelle à l'effectif, ou à la fréquence, de la modalité. L'angle α_i d'une modalité d'effectif n_i est donné en degrés par : $\alpha_i = \frac{n_i}{N} \times 360 = f_i \times 360$.

Exemple 2.1 *On interroge* 50 *personnes sur leur dernier diplôme obtenu. On a obtenu la série*

Dernier diplôme obtenu (x_i)	*Effectif* (n_i)
Sans diplôme (Sd)	*4*
Primaire (P)	*11*
Secondaire (Se)	*14*
Supérieur non-universitaire (Su)	*9*
Universitaire (U)	*12*

Finalement, on obtient le tableau statistique complet

x_i	n_i	$f_i = \frac{n_i}{N}$
Sd	4	0.08
P	11	0.22
Se	14	0.28
Su	9	0.18
U	12	0.24
$\sum$	$N = 50$	1.00

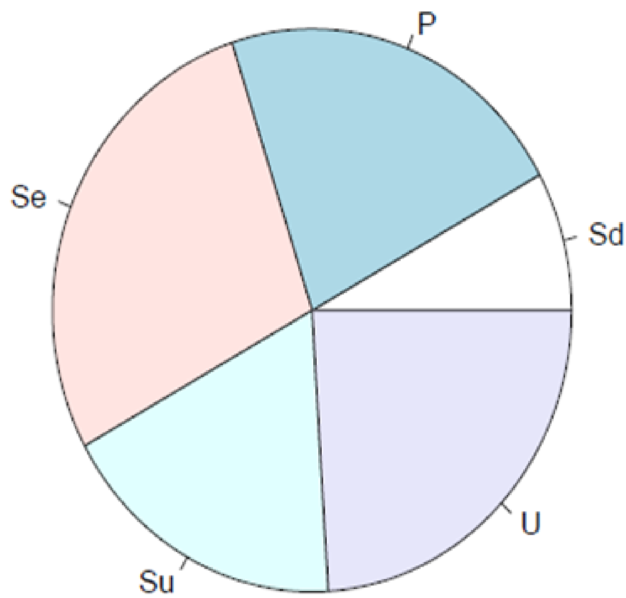


Figure 2.1 : Diagrammes circulaire des fréquence.

2.1.2 Représentation en tuyaux d'orgue

Nous portons en abscisses les modalités, de façon arbitraire. Nous portons en ordonnées des rectangles dont la longueur est proportionnelle aux effectifs, ou aux fréquences, de chaque modalité.

Exemple 2.2 *Entreprise dispose de* 6 *produits dans son catalogue :* A, B, C, D, E *et* F. *Les résultats des ventes de ces* 6 *produits sont résumés dans le tableau suivant (la variable est donc ici "type de produit vendu") :*

Produit vendu (x_i)	A	B	C	D	E	F
Effectif (n_i)	480	1200	1040	640	160	480

Finalement, on obtient le tableau statistique complet

x_i	n_i	f_i
A	480	$0,12$
B	1200	$0,3$
C	1040	$0,26$
D	640	$0,16$
E	160	$0,04$
F	480	$0,12$
$\sum$	$N =$	1.00

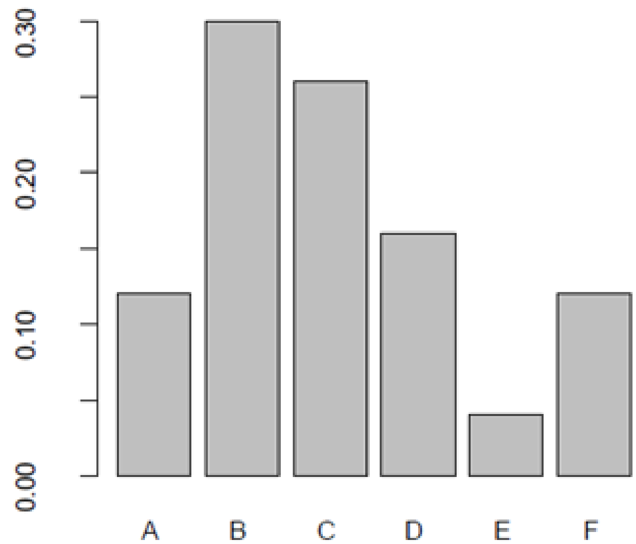


Figure 2.2 : Représentation en tuyaux d'orgue.

2.2 Cas de variables quantitatives

La représentation graphique d'une variable quantitative dépend de sa nature : discrète ou continue.

2.2.1 Variables quantitatives discrètes

Essentiellement deux types de graphique permettant de visualiser les effectifs (ou fréquences) cumulés.

Diagramme différentiel

On porte sur l'axe des abscisses les valeurs discrètes de la variable et **les effectifs** ou **les fréquences** en ordonnées. Chaque valeur discrète de la variable est représentée par une barre verticale dont la hauteur correspond à l'effectif.

Exemple 2.3 *Un quartier est composé de 50 ménages, et la variable Z représente le nombre de personnes par ménage. Les valeurs de la variable sont*
1 1 1 1 1 2 2 2 2 2
2 2 2 2 3 3 3 3 3 3
3 3 3 3 3 3 3 3 3 4
4 4 4 4 4 4 4 4 4 5
5 5 5 5 5 6 6 6 8 8
On peut construire le tableau statistique

x_i	n_i	N_i	f_i	F_i
1	5	5	0.10	0.10
2	9	14	0.18	0.28
3	15	29	0.30	0.58
4	10	39	0.20	0.78
5	6	45	0.12	0.90
6	3	48	0.06	0.96
8	2	50	0.04	1.00
$\sum$	50		1.0	

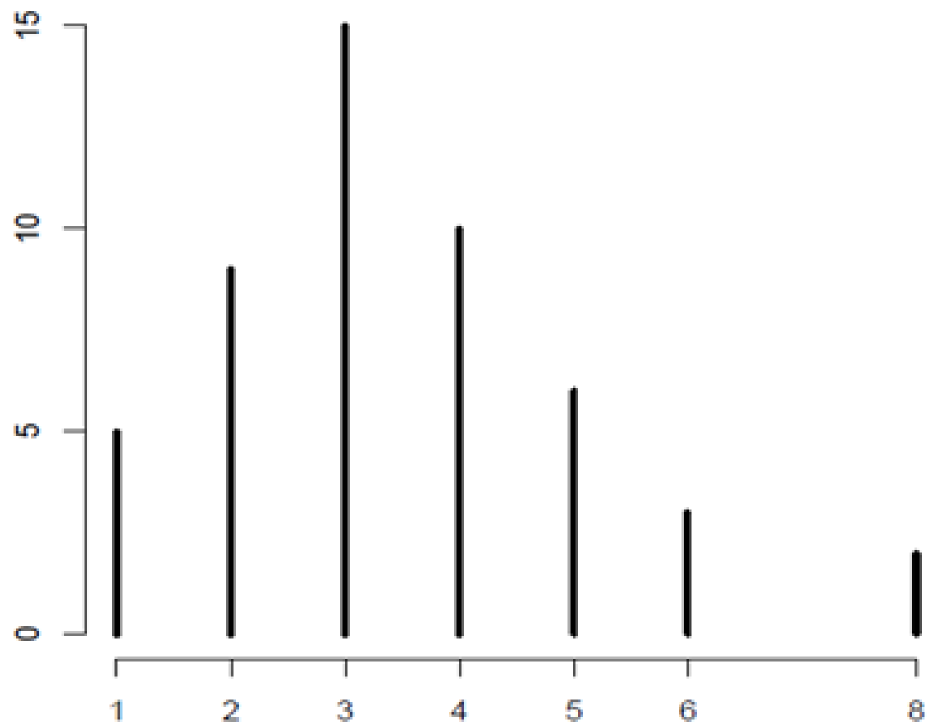


Figure 2.3 : Diagramme différentiel.

Diagramme intégral

On porte sur l'axe des abscisses les valeurs discrètes de la variable et **les effectifs cumulés** croissants sur l'axe des ordonnées. On trace alors une courbe en escalier qui sera ouverte à gauche et fermée à droite en chaque point de discontinuité. Celle-ci donne pour chaque x_i la proportion des individus dont la valeur est inférieure à x_i :

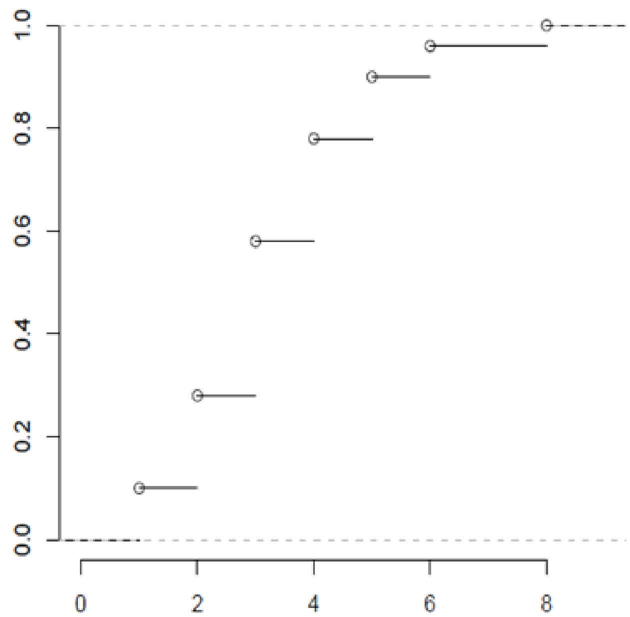


Figure 2.3 : Diagramme intégral de l'exemple 2.3.

2.2.2 Variables quantitatives continues

On suppose dans un premier temps qu'elles sont regroupées en classes dont les amplitudes ne sont pas nécessairement constantes. Là aussi deux graphiques essentiels :

Histogramme :

C'est un diagramme composé de rectangles contigus (chaque rectangle est associé à une classe) dont l'aire est proportionnelle à l'effectif de la classe. Ainsi la hauteur des rectangles est donnée par la densité de fréquence dans le cas de classes d'amplitudes différentes. Si les classes ont toutes la même amplitude, densité de fréquence et fréquence sont proportionnelles. On peut alors placer n'importe laquelle de ces deux grandeurs en ordonnées.

Exemple 2.4 *On mesure la taille en centimètres de 50 élèves d'une classe :*

152	152	152	153	153
154	154	154	155	155

156	156	156	156	156
157	157	157	158	158
159	159	160	160	160
161	160	160	161	162
162	162	163	164	164
164	164	165	166	167
168	168	168	169	169
170	171	171	171	171

On a les classes de tailles définies préablement comme suit :

$$[151.5,\ 155.5[\quad [155.5,\ 159.5[\quad [159.5,\ 163.5[\quad [163.5,\ 167.5[\quad [167.5,\ 171.5[$$

On construit le tableau statistique suivant :.

$[a_{i-1},\ a_i[$	n_i	f_i	N_i	F_i
$[151.5,\ 155.5[$	10	0.20	10	0.20
$[155.5,\ 159.5[$	12	0.24	22	0.44
$[159.5,\ 163.5[$	11	0.22	33	0.66
$[163.5,\ 167.5[$	7	0.14	40	0.80
$[167.5,\ 171.5[$	10	0.20	50	1.00
$\sum$	50	1.00		

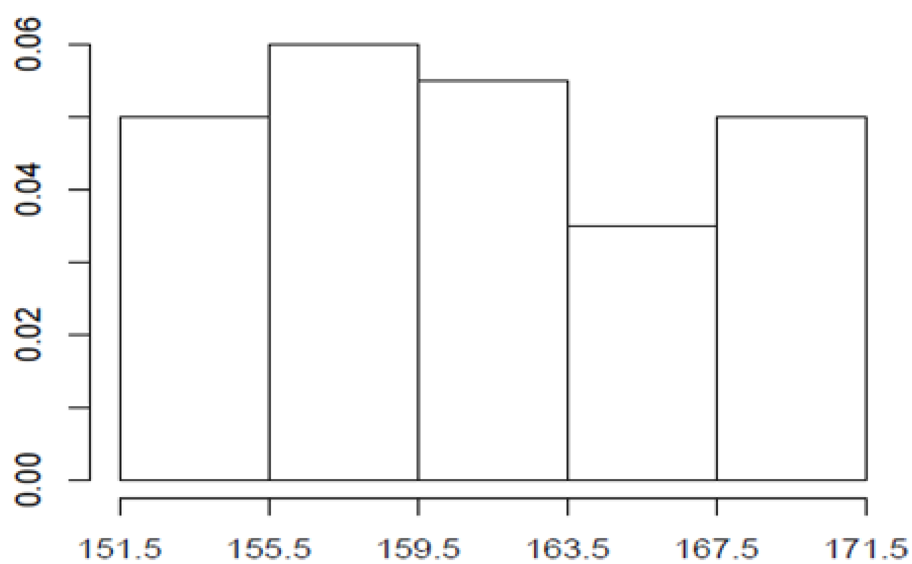


Figure 2.3 : Histogramme des fréquences.

Courbe (ou polygone) des fréquences cumulées croissantes

C'est une ligne brisée croissante, on la trace en joignant les points (a_i, F_i) où a_i est la borne supérieure de la ième classe et F_i est la fréquence cumulée croissante associée à la ième classe.

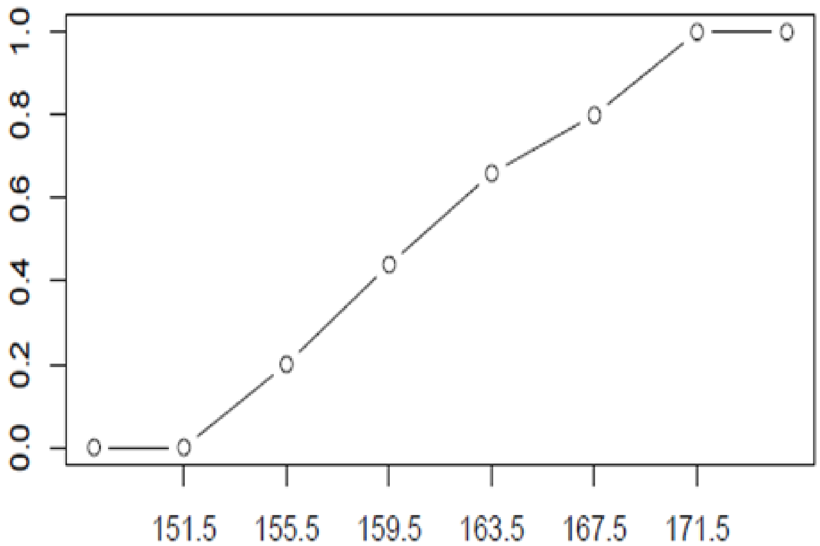


Figure 2.4 : Courbe cumulée de l'exemple 2.4.

Chapitre 3

Représentations numérique des données

3.1 Les caractéristiques de tendance centrale ou de position

Ce sont des valeurs numériques qui vont ”résumer” l’échantillon en caractérisant son ordre de grandeur. On ne les calcule que dans le cas des variables quantitatives.

3.1.1 Le mode

Définition 3.1 *Le mode est la valeur distincte correspondant à l’effectif le plus élevé, il est noté M_o.*

Remarque 3.1 *1) Le mode peut être calculé pour tous les types de variable, quantitative et qualitative.*
2) Le mode n’est pas nécessairement unique.
3) Pour une variable quantitative continue nous parlons de classe modale : c’est la classe dont la densité de fréquence est maximum.

3.1.2 La Médiane

Définition 3.2 *La médiane, désignée par Me, est la valeur de la variable telle qu’il y ait autant d’observations, en dessous d’elle qu’au dessus ou, ce qui revient au même, la valeur correspondant à 50% des observations.*

Calcul de médiane pour une variable discrète

On désigne par N le nombre d’observations

$$Me = \begin{cases} \text{la } \left(\frac{N+1}{2}\right)^{\text{ème}} \text{ observation si } N \text{ est impair} \\ \\ \frac{(k)^{\text{ème}} \text{ observation} + (k+1)^{\text{ème}} \text{ observation}}{2} \text{ si } N = 2k \end{cases}$$

Calcul de médiane pour une variable continue

Pour une variable continue, on détermine la classe médiane en utilisant les effectifs cumulés. On détermine la médiane au sein d’une classe par l’interpolation linéaire.

Exemple 3.1 *Soit une étude sur la note d'une population de 50 étudiants.*

Notes	n_i	N_i
$[0;\ 5[$	10	10
$[5;\ 8[$	8	18
$[8; 12[$	12	30
$[12; 15[$	11	41
$[15; 20[$	9	50

D'après la colonne "effectif cumulé", 18 personnes ont moins de 8 et 30 personnes ont moins de 12. La médiane se trouve donc dans l'intervalle $[8; 12[$. *Sur la Figure 3.1, les points A, X, B sont alignés et les droites AX, BX et AB ont le même coefficient directeur (la pente est la même). Le coefficient directeur d'une droite est déterminé par deux de ces points. Le coefficient directeur de la droite AB se calcule par :*

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Pour trouver la valeur $Me,$ on peut calculer m_{AX} et m_{AB} et résoudre la règle de trois suivante :

$$m_{AX} = m_{AB} \text{ donc } \frac{M-8}{25-18} = \frac{12-8}{30-18}$$

La médiane Me est donc 10.33*. Cela signifie qu'environ %50 des personnes ont eu moins de 10.33 et %50 plus de 10.33.*

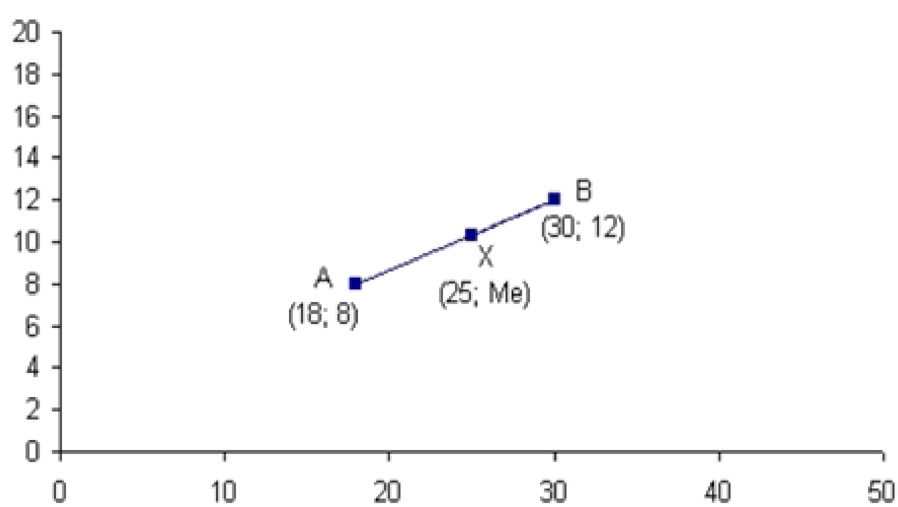


Figure 3.1 : Calcul de médiane pour une variable continue par l'interpolation linéaire.

En générale, on peut écrire : $Me = a_{i-1} + (a_i - a_{i-1})\frac{\frac{N}{2} - N_{i-1}}{n_i}$, *d'ou* $[a_{i-1}; a_i[$ *la classe médiane.*

Remarque 3.2 *La loi de la médiane peut aussi s'écrire come suit :* $Me = a_{i-1} + (a_i - a_{i-1})\frac{0.5 - F_{i-1}}{f_i}$, *d'ou* f_i *et* F_{i-1} *sont les fréquence et les fréquences cumulées de la classe médiane* $[a_{i-1}; a_i[$.

3.1.3 Les quartiles

Définition 3.3 *On appelle* ***premier quartile*** *d'une série la plus petite valeur* Q_1 *des termes de la série pour laquelle au moins un quart (25%) des données sont inférieures ou égales à* Q_1.

la valeur Q_1, on utilisant la méthode de l'interpolation linéaire comme dans le cas de la médiane, est donnée comme suit :

$$Q_1 = a_{i-1} + (a_i - a_{i-1})\frac{\frac{N}{4} - N_{i-1}}{n_i} = a_{i-1} + (a_i - a_{i-1})\frac{0.25 - F_{i-1}}{f_i}$$

d'ou $Q_1 \in [a_{i-1}; a_i[$.

Définition 3.4 *On appelle* ***troisième quartile*** *d'une série la plus petite valeur* Q_3 *des termes de la série pour laquelle au moins trois quarts (75%) des données sont inférieures ou égales à* Q_3.

La valeur Q_3 est donnée comme suit :

$$Q_3 = a_{i-1} + (a_i - a_{i-1})\frac{\frac{3N}{4} - N_{i-1}}{n_i} = a_{i-1} + (a_i - a_{i-1})\frac{0.75 - F_{i-1}}{f_i}$$

d'ou $Q_3 \in [a_{i-1}; a_i[$.
Dans l'exemple 3.1 :
La classe qui contient Q_1 est $[5; 8[$ donc $Q_1 = 5 + (8 - 5)\frac{12.5-10}{8} = 5.9375$.
La classe qui contient Q_3 est $[12; 15[$ donc $Q_3 = 12 + (15 - 12)\frac{37.5-30}{11} = 14.045$.

3.1.4 La moyenne arithmétique

La moyenne arithmétique est la moyenne « ordinaire », c'est-à-dire la somme des valeurs numériques (de la liste) divisée par le nombre de ces valeurs numériques

$$\bar{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i = \sum_{i=1}^{k} f_i x_i$$

Il existe d'autres "moyennes" : **géométrique** $G = \left(\prod_{i=1}^{k} x_i^{n_i}\right)^{\frac{1}{N}}$, **harmonique** : $H = \frac{N}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}$ et **quadratique** $Q = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i^2 x_i^2}$.

Dans le cas où la variable est continue

$$\bar{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i c_i$$

d'où c_i est le centre de la classe $[a_{i-1}, a_i[$.

3.2 Les caractéristiques de dispersion

Les paramètres de dispersion sont des grandeurs qui mesurent l'étalement des valeurs observées autour d'une valeur centrale.

3.2.1 L'étendu

Définition 3.5 *L'étendue E de X est la différence entre la plus grande valeur $X_{\max}$ et la plus petite valeur $X_{\min}$:*

$$E = X_{\max} - X_{\min}$$

3.2.2 L'intervalle interquartile

Définition 3.6 *L'intervalle interquartile, note I_Q, est la différence entre les deux quartiles Q_3 et Q_1 :*

$$I_Q = Q_3 - Q_1$$

Cet intervalle contient 50% de la population en éliminant 25% à chaque extrémité. Cette caractéristique est nettement meilleure que l'étendue.

3.2.3 La variance

La variance est une grandeur positive

1. Si la variable est discrète, la variance est

$$Var\left(X\right) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} n_i\left(X_i - \bar{X}\right) = \sum_{i=1}^{n} f_i\left(X_i - \bar{X}\right)$$

2. Si la variable est continue, la variance est :

$$Var\left(X\right) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i\left(c_i - \bar{X}\right) = \sum_{i=1}^{k} f_i\left(c_i - \bar{X}\right)$$

d'où c_i est le centre de la classe $[a_{i-1}, a_i[$.

3.2.4 L'écart type

Définition 3.7 *L'écart type (ou encore l'écart quadratique moyen) d'une série statistique est la racine carrée de la variance. On le note* σ_X

$$\sigma_X = \sqrt{Var\,(X)}$$

Remarque 3.3 *A la différence de la variance qui correspond à un carrée, l'écart quadratique moyen est homogène à la variable statistique et s'exprime dans les mêmes unités. Il permet de mesurer la dispersion de la distribution statistique autour de sa valeur moyenne.*

3.2.5 Le coefficient de variation

Définition 3.8 *Le coefficient de variation est défini comme le rapport entre l'écart-type et la moyenne*

$$\frac{\sigma_X}{\bar{X}}$$

Remarque 3.4 *L'écart-type seul ne permet le plus souvent pas de juger de la dispersion des valeurs autour de la moyenne. Ce nombre est sans unité, c'est une des raisons pour lesquelles il est parfois préféré à l'écart type qui ne le lui est pas. En effet, pour comparer deux séries de données d'unités différentes, l'utilisation du coefficient de variation est plus judicieuse.*

3.3 Exercices

Exercice 1 :

Considérons les variables suivantes :

– *nombre d'enfants dans une famille,*
– *couleur des yeux,*
– *catégorie socio-professionnelle,*
– *commune de naissance,*
– *niveau de scolarité,*
– *revenu,*
– *poids,*
– *sexe,*
– *âge,*
– *langue maternelle,*
– *type de voiture,*
– *taille.*

Spécifiez pour chacune de ces variables si en général elle est qualitative (nominale ou ordinale) ou quantitative (discrète ou continue).

Exercice 2 :

On s'intéresse à la variable X = "Nature du lieu d'habitation" pour laquelle on a observé les effectifs suivants :

x_i :	Centre ville	Banlieue	Village	Cité	Autre
n_i :	87	30	32	30	10

a) *Quel est le type de cette variable ?*

b) *Quel est son mode ?*

c) *Représenter le diagramme en barres des fréquences ainsi que le diagramme des fréquences.*

Exercice 3 :

Un constructeur d'automobiles a demandé à150 individus de faire part de leur préférence concernant la couleur de la voiture. Les résultats qu'il obtient sont les suivants :

Couleurs :	Blanc	Noir	Rouge	Bleu	Vert
Effectifs :	43	30	15	32	30

a) *De quel type est la variable ?*

b) *Donnez le tableau de la distribution observée.*

c) *Représentez graphiquement la distribution de la variable. Quelles sont les représentations possibles ?*

d) *Quels paramètres de cette distribution peuvent être calculés ?*

e) *Déterminez la valeur de ces paramètres.*

Exercice 4 :

Lors d'une étude en psychologie sociale sur la mobilité géographique, on a interrogé 50 personnes pour savoir si elles passent leurs vacances à l'étranger. Les effectifs obtenus sont les suivants :

Vacances à l'étranger :	Jamais	Parfois	Souvent	Toujours
Effectifs :	43	30	15	32

a) *De quel type est la variable ?*

b) *Donnez le tableau de la distribution observée (effectifs et effectifs cumulés).*

c) *Représentez graphiquement la distribution de la variable. Quelles sont les représentations possibles ?*

d) *Quels paramètres de cette distribution peuvent être calculés ?*

e) *Déterminez la valeur de ces paramètres.*

Exercice 5 :

Au poste de péage, on compte le nombre de voitures se présentant sur une période de 5mn. Sur 100 observations de 5mn, on obtient les résultats suivants :

Nombre de voitures :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Nombre d'observations :	2	8	14	20	19	15	9	6	2	3	1	1

a) *Construire la table des fréquences et le diagramme en bâtons en fréquences de la série du nombre de voitures.*

b) *Calculer la moyenne et l'écart-type de cette série.*

c) *Déterminer la médiane, les quartiles.*

d) *Etudier la symétrie de la série.*

Exercice 6 :

On donne la série unidimensionnelle suivante, correspondant à la répartition des entreprises du secteur automobile en fonction de leur chiffre d'affaire en millions d'euros.

chiffres d'affaires	moins de 0,25	[0,25 ;0,5[	[0,5 ;1[	[1 ;2,5[	[2,5 ;5[	[5 ;10[
nombre d'entreprises	137	106	112	154	100	33

a) *Calculer le chiffre d'affaire moyen et l'écart-type de la série.*

b) *Construire l'histogramme des fréquences.*

c) *Construire les deux polygones des fréquences cumulées.*

d) *Calculer la médiane et la proportion d'entreprises dont le chiffre d'affaire est supérieur à 3 millions d'euros.*

Exercice 7 :

On a mesuré, en millisecondes, à quelle vitesse 50 enfants de quatre ans identifiaient des images simples (ours, lapin, chat . . .). Les résultats sont les suivants :

24 27 33 21 27 19 23 23 24 19
27 30 15 27 24 34 18 20 21 15
33 27 20 32 28 27 22 17 30 18
21 25 25 29 25 24 32 31 28 20
29 24 23 27 17 15 21 28 24 23

a) *De quel type est la variable ?*

b) *Regroupez les 50 valeurs en classes. Prenez des classes de longueur 4 et le début de la première classe en 14,5. Donnez le tableau de la distribution groupée (effectifs et effectifs cumulés).*

c) *Représentez graphiquement la distribution groupée. Quelles sont les représentations possibles ?*

d) *Quels paramètres de cette distribution groupée peuvent être calculés ?*

e) *Déterminez la valeur de ces paramètres.*

Exercice 8 :

Considérons une série statistique $\{X_1, ..., X_i, ..., X_n\}$ *relative à un caractère quantitatif* X *et le changement d'origine et d'unité suivant :*

$$Y_i = \frac{X_i - a}{d}, \quad , i = 1, ..., n.$$

Soient $\bar{X}$ *et* $Var(X)$ *la moyenne et la variance de la série* $\{X_1, ..., X_i, ..., X_n\}$ *et* $\bar{Y}$ *et* $Var(Y)$ *celles de la série* $\{Y_1, ..., Y_i, ..., Y_n\}$*. Démontrez que :*

a) $\bar{Y} = \frac{\bar{X}-a}{d}$

b) $Var(Y) = \frac{1}{d^2} Var(X)$

Exercice 9 :

Considérons la série statistique de taille n *:* $\{x_1, ..., x_i, ..., x_n\}$*. Montrez que :*

a) $\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}\right) = 0$, *si* $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

b) $Var(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \bar{X}^2$

Exercice 10 :

La distribution des demandeurs d'emploi selon le sexe et la classe d'âge dans une localité est la suivante

âge	Hommes	Femmes
[16 ;26[	280	160
[26 ;40[	310	360
[40 ;50[	240	120
[50 ;60[	420	530
[60 ;65[	70	50

a) *Tracer les deux courbes de fréquences cumulées croissantes.*

b) *Déterminer les quartiles de la variable X associant à chaque demandeur d'emploi masculin son âge. Même question pour les demandeurs d'emploi de sexe féminin.*

Exercice 11 :

On étudie les revenus (mensuels en euros) d'un ensemble de familles d'un quartier

Revenus	[700;900[	[900;1100[	[1100;1300[	[1300;1400[	[1400;1500[	[1500;1600]]
Effectifs	13	219	20	46	50	82

a) *Quel est le nombre de familles dont les revenus sont compris entre 700 et 900 ?*

b) *Quelle est la proportion de familles dont les revenus sont compris entre 900 et 1500 ?*

c) *Quelle est la moyenne des revenus ? (Préciser la formule utilisée)*

d) *Quel est l'écart-type des revenus ? (Préciser la formule utilisée)*

e) *Que mesure la moyenne et la variance ?*

f) *Dans quel intervalle se trouve la médiane ? Calculer la en faisant une interpolation linéaire.*

g) *Faire l'histogramme correspondant à cette distribution et placer sur cet histogramme la médiane en abscisse. Que remarquez-vous*

Exercice 12 :

Une population statistique se présente comme suit :

valeur de la variable	[0;4[	[4;10[	[10;20[	[20;40[
effectifs	4	20	14	2

a) *Calculer la moyenne et la variance.*

b) *Chacune des classes de la distribution précédente est divisée en deux classes de même amplitude, auxquelles on fait correspondre un effectif moitié de l'effectif initial de la classe qui a été divisée. Faire un nouveau tableau. Comment sont modifiées la moyenne et la variance ?*

Chapitre 4

Analyse combinatoire

L'analyse combinatoire comprend un ensemble de méthodes qui permettent de déterminer le nombre de tous les résultats possibles d'une expérience particulière. La connaissance de ces méthodes de dénombrement est indispensable au calcul du probabilité qui constitue le fondement de la statistique.

4.1 Principe fondamental

Si une procédure quelconque peut être représenteé de n_1 de façons différentes, si après cette procédure, une seconde procédure représenteé de n_2 de façons différentes et ainsi de suite alors le nombre de façons différentes qui permettent d'exécuter les procédures dans l'ordre indique est égale au produits $n_1 \times n_2 \times ...$

Exemple 4.1 *Lors de la désignation du bureau d'une association, il y a trois candidats au poste de président et cinq candidat au poste de trésorier. Le nombre de bureaux possibles est alors : 3×5=15.*

4.2 Permutations

4.2.1 Permutations sans répétitions

Définition 4.1 *Une permutation de n éléments est un ordre sans répétition de ces n éléments. (une façon de ranger côte à côte ces n éléments)*

Proposition 4.1 *Si P_n est le nombre de permutations de n éléments, alors :* $P_n = n!$

Preuve. Il ya en effet n façons de choisir le premier élément de l'ordre, puis $(n-1)$ pour le deuxième, etc. D'après le principe fondamental, les permutations sans répétitions est $P_n = n \times (n-1) \times ... \times 1 = n!$. ■

Exemple 4.2 *De combien de manières peut-on classer 4 individus :* $P_n = 4! = 24$

4.2.2 Permutations avec répétitions

Définition 4.2 *On appelle permutation avec répétition de n éléments dont certains sont semblables toute disposition ordonnée de ces n éléments*

Proposition 4.2 *Le nombre de permutations de n éléments dont n_1 sont semblables, n_2 sont semblables, ..., n_k sont semblables est :* $\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times ... \times n_k!}$

La vérification est laissée en exercice.

Exemple 4.3 *Au jeu "des chiffres et des lettres", combien y-a-t-il de tirages possibles contenant n_A fois la lettre A, n_B fois la lettre B, ..., n_Z fois la lettre Z, avec $n_A + n_B + ... + n_Z = 9$? Le nombre de choix est donc $\frac{9!}{n_A! \times n_B! \times ... \times n_Z!}$.*

4.3 Arrangements

Un arrangement de p éléments choisis parmi n éléments est une disposition ordonnée de p de ces n éléments. On distingue les arrangements avec répétitions et les arrangements sans répétitions.

4.3.1 Arrangements sans répétitions

Définition 4.3 *C'est le nombre d'arrangements que l'on peut faire avec p éléments choisis parmi n éléments, chacun d'eux ne peut figurer qu'une seule fois dans le même arrangement.*

Proposition 4.3 *Le nombre d'arrangements sans répétitions est : $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$.*

Preuve. En effet, pour choisir le premier élément, il y a n possibilités, pour le second il n'en reste que $(n-1)$ possibilités, etc..., pour le p^e n'en reste $(n-p+1)$ possibilités. D'après le principe fondamental de l'analyse combinatoire : $A_n^p = n \times (n-1) \times .... \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$ ■

Exemple 4.4 *Le nombre d'arrangements sans répétitions que l'on peut faire avec deux éléments choisis parmi trois éléments a, b, c est : $A_3^2 = \frac{3!}{(2)!} = 6$. Ces 6 arrangements sont : $(a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (b, c)$, et (c, b).*

4.3.2 Arrangements avec répétitions

Définition 4.4 *C'est le nombre d'arrangements que l'on peut faire avec p éléments choisis parmi n éléments, chacun d'eux peut figurer plusieurs fois dans le même arrangement.*

Proposition 4.4 *Le nombre d'arrangements avec répétitions est : $A_n^p = n^p$.*

Preuve. En effet, pour choisir le premier élément, il y a n possibilités, pour le second il y a aussi n possibilités, etc...pour le p^e il y a aussi n possibilités. D'après principe fondamental de l'analyse combinatoire : $A_n^p = n \times n \times .... \times n$ (p foi) $= n^p$ ■

Exemple 4.5 *Le nombre d'arrangements avec répétitions que l'on peut faire avec deux éléments choisis parmi trois éléments a, b, c est : $3^2 = 9$. Ces 9arrangements sont : $(a, a), (a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (b, b), (b, c$ et (c, c).*

4.4 Combinaisons

Une combinaison de p éléments choisis parmi n éléments est une disposition non ordonnée de p de ces n éléments. On distingue les combinaisons avec répétitions et les combinaisons sans répétitions.

4.4.1 Combinaisons sans répétitions

Définition 4.5 *C'est le nombre de combinaisons que l'on peut faire avec p éléments choisis parmi n éléments, chacun d'eux ne peut figurer qu'une seule fois dans la même combinaison.*

Proposition 4.5 *Le nombre de combinaisons sans répétitions est :* $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

Preuve. Soit C_n^p Le nombre de combinaisons sans répétitions de p éléments. Toute combinaison de p éléments engendre $p!$ permutation, on peut conclure que $A_n^p = p! \times C_n^p$, on trouve $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.
■

Exemple 4.6 *Le nombre de combinaisons sans répétitions que l'on peut faire avec deux éléments choisis parmi trois éléments a, b, c est :* $C_3^2 = \frac{3!}{2!1!}$. *Ces* 3 *combinaisons sont :* $(a, b), (a, c)$, *et* (b, c).

4.4.2 Combinaisons avec répétitions

Définition 4.6 *C'est le nombre de combinaisons que l'on peut faire avec p éléments choisis parmi n éléments, chacun d'eux peut figurer plusieurs fois dans la même combinaison.*

Proposition 4.6 *Le nombre de combinaisons avec répétitions est :* $C_{n+p-1}^p = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!}$

La vérification est laissée en exercice.

Exemple 4.7 *Le nombre de combinaisons avec répétitions que l'on peut faire avec deux éléments choisis parmi trois éléments a, b, c est :* $C_{3+2-1}^2 = C_4^2 = \frac{4!}{2!2!} = 6$. *Ces 6 combinaisons sont :* $(a, a), (a, b), (a, c), (b, b), (b, c)$, *et* (c, c).

4.4.3 Propriétés

Proposition 4.7 *i)* $C_n^p = C_n^{n-p}$; *ii)* $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$ *(formule de Pascal)*; *iii)* $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}$ *(formule du binôme).*

Preuve. i) $C_n^{n-p} = \frac{n!}{(n-p)!(n-(n-p))!} = \frac{n!}{(n-p)!(p)!} = C_n^p$.
ii) $C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1} = \frac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!} + \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} = \frac{(n-1)!}{p!(n-p)!}(n-p+p) = \frac{n!}{p!(n-p)!} = C_n^p$.
iii) est laissée en exercice. ∎

4.5 Exercices

Exercice 1 :

Une classe comporte 20 étudiants. Douze filles et huit garçons. Le professeur décide de désigner un groupe de travail de trois élèves chargés de préparer un devoir maison.

a) Combien de groupes de travail de trois élèves est il possible de former ?

b) Combien y a-t-il de groupes constitués de trois filles ?

c) Combien y a-t-il de groupe avec deux filles et un garçon ?

Exercice 2 :

Un étudiant va acheter trois livres de math et deux bandes dessinées.

a) De combien de façons l'étudiant peut-il faire ses achats ?

b) De retour chez lui, il forme une pile avec ses nouveaux livres. De combien de façons peut-il le faire ?

c) Même question si l'étudiant souhaite que ses livres de math se trouvent en bas de la pile, et ses bandes dessinées en haut.

d) Même question si l'étudiant souhaite que ses livres de math se suivent dans la pile (mais pas nécessairement les bandes dessinées).

Exercice 3 :

Une plaque d'immatriculation contient deux lettres distinctes suivies de 3 chiffres dont le premier est différent de 0. Combien de plaques différentes peut-on fabriquer ? De combien de façons différentes peut-on répartir un groupe de 7 personnes :

a) sur une rangée de 7 chaises ?

b) autour d'une table ronde ?

Exercice 4 :

De combien de façons différentes 3 garçons et 2 filles peuvent-ils prendre place sur un banc ?

a) On suppose les garçons indiscernables entre eux, de même pour les filles.

b) On suppose les garçons discernables entre eux, de même pour les filles.

Exercice 5 :

Combien de permutations distinctes peut-on former avec toutes les lettres des mots :

a) leur b) anabase c) sociologique ?

Exercice 6 :

En supposant que les personnes de même nationalité s'assoient les unes à côté des autres, de combien de façons différentes 3 Algériens, 4 Français, 4 Danois et 2 Italiens peuvent-ils prendre place sur un banc ?

a) On suppose les personnes de même nationalité indiscernables entre elles.

b) On suppose les personnes de même nationalité discernables entre elles.

Exercice 7 :

De combien de manières peut-on former un jury de 3 hommes et 2 femmes si l'on dispose de 7 hommes et de 5 femmes ?

Exercice 8 :

A l'oral d'un examen, un étudiant doit répondre à 8 questions sur 10.

a) Combien de choix y-a-t-il ?

b) Combien de choix a-t-il s'il doit répondre aux trois premières questions ?

c) Combien de choix a-t-il s'il doit répondre au moins à 4 des 5 premières questions ?

Exercice 9 :

Calculer le nombre de sous-ensembles d'un ensemble comprenant n éléments.

a) De combien de manières peut-on offrir 7 jouets à 3 enfants du même âge, dont un reçoit 3 jouets et chacun des autres 2 jouets ?

b) De combien de manières différentes peut-on répartir 12 élèves en 3 classes de telle sorte que chaque classe contienne 4 élèves ?

Chapitre 5

Espace probabilisable

5.1 Expérience aléatoire

Définition 5.1 *Une **expérience** est dite **aléatoire** ou stochastique s'il est impossible de prévoir son résultat.*

Le calcul des probabilités permet de modéliser et de simuler de telles expériences

Exemple 5.1 ***a)*** *On jette un dé et l'on observe le résultat obtenu.*
b) *Si l'on lance trois fois de suite une pièce de monnaie.*
c) *On jette une pièce de monnaie jusqu'à ce que le côté face sorte pour la première fois.*

5.2 Univers et événement

Définition 5.2 *L'ensemble, noté en général Ω, de tous les résultats d'une expérience aléatoire est appelé **univers** ou e**space des résultats possibles** de cette expérience.*

Remarque 5.1 *l'ensemble Ω peut être fini (exemples a) et b) ou infini (exemple c)).*

Définition 5.3 *On appelle **événement** tout sous-ensemble de Ω. Un événement qui contient un unique élément de Ω est un **événement élémentaire**.*

Exemple 5.2 *Si on jette un dé à 6 faces non truqué : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$*
A est l'événement "un nombre pair est tiré" alors $A = \{2, 4, 6\}$.
B est l'événement "un nombre impair est tiré" alors $B = \{1, 3, 5\}$.
C est l'événement "un nombre ≥ 4" alors $C = \{4, 5, 6\}$.
D est l'événement élémentaire "le plus petit nombre" alors $D = \{1\}$.

5.3 Evénement contraire et événements incompatibles

Définition 5.4 *Soit A un événement d'un univers Ω. L'événement **contraire** de A est l'événement formé des issues de Ω qui ne réalisent pas A et on le note $\bar{A}$.*

Remarque 5.2 *On a $A \cap \bar{A} = \varnothing$ et $A \cup \bar{A} = \Omega$.*

Exemple 5.3 *On lance un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On considère les événements :*
A : « la face qui apparaît est un multiple de 3 »
B : « la face qui apparaît n'est pas un multiple de 3 »

A et B sont évidemment deux événements contraires

Définition 5.5 *Soit A et B deux événements d'un même univers. Lorsque aucune issue ne réalise à la fois l'événement A et l'événement B, on dit que les événements A et B sont **incompatibles**, on a alors $A \cap B = \varnothing$*

Exemple 5.4 *Dans une urne on place 10 cartons portant chacun un numéro de 1 à 10. On extrait un carton de l'urne. On considère les événements :*
C :«le carton extrait porte un numéro pair »
D : «le carton extrait porte un numéro impair »
Les événements C et D sont incompatibles

5.4 Système complet d'événements

Définition 5.6 *L'ensemble $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ constitue système complet d'événement si et seulement si :*
(i) Aucun des évènements n'est impossible : $A_i \neq \varnothing$, $i = 1, 2, ..., n$.
(ii) Les évènements sont incompatibles 2 à 2 : $A_i \cap A_j = \varnothing$, $i \neq j = 1, 2, ..., n$.
(iii) L'union des évènements est l'ensemble fondamental : $\cup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$.

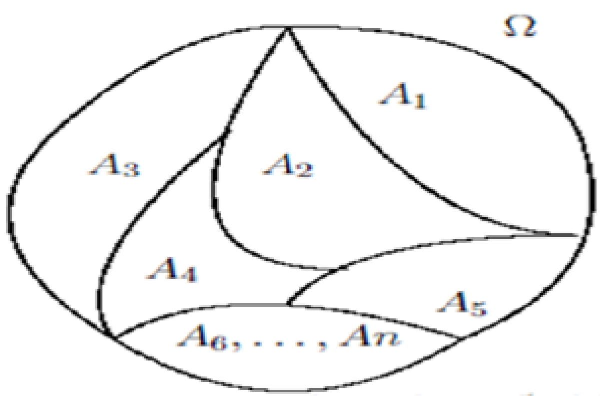


Figure 5.1 : Système complet d'événements.

Exemple 5.5 *Si on joue avec deux dés un blanc et un rouge, l'expérience aléatoire peut être modélisée par l'ensemble des couples (a, b) où a est le numéro obtenu avec le dé blanc et b le numéro obtenu avec le dé rouge. Autrement dit $\Omega = \{1, ..., 6\} \times \{1, ..., 6\}$. Considérons les événements A_i, $2 \leq i \leq 12$ définis par : A_i :"la somme des points marqués égale i". Les A_i forment un système complet d'événements.*

5.5 Algèbre et σ-algèbre des événements

Définition 5.7 *Un ensemble $\mathcal{F}$ de parties d'un ensemble Ω est une **algèbre**, s'il satisfait aux trois conditions suivantes :*
i) $\Omega \in \mathcal{F}$
ii) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{F}$
iii) $A,\, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$

Exemple 5.6 *a)* $\{\varnothing, \Omega\}$ *est une algèbre sur* Ω.
b) Si $A \subset \Omega$, $\left\{\varnothing, A, \bar{A}, \Omega\right\}$ *est une algèbre sur* Ω.

Proposition 5.1 *Si $\mathcal{F}$ est une algèbre sur Ω, alors on a*
i) $\varnothing \in \mathcal{F}$,
ii) $\forall A,\, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F}$.

Preuve. i) $\Omega \in \mathcal{F} \Rightarrow \bar{\Omega} = \varnothing \in \mathcal{F}$.
ii) $\forall A,\, B \in \mathcal{F} \Rightarrow \bar{A}, \bar{B} \in \mathcal{F} \Rightarrow \bar{A} \cap \bar{B} \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F}$. ■

Remarque 5.3 *En itérant la propriété 3., il suit que si $A_1,\, A_2, ...A_n \in \mathcal{F}$ alors,*
$A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n \in \mathcal{F}$ *et* $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n \in \mathcal{F}$

Le fait que $\mathcal{F}$ soit une algèbre n'implique pas que l'union ou l'intersection d'une collection infinie $A_1,\, A_2, ...$ d'événements soient également dans $\mathcal{F}$. De nombreux événements importants s'expriment toutefois comme union ou intersection d'un nombre infini d'événements.

Définition 5.8 *$\mathcal{A}$ est une σ-**algèbre** (ou **tribu)** sur Ω si*
*i) $\mathcal{A}$ est une **algèbre** sur Ω.*
ii) $\forall \{A_i\}_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

Proposition 5.2 $\forall \{A_i\}_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

Exemple 5.7 *On lance un dé :* $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ *, la famille* $\mathcal{A} = \{\varnothing, \Omega, \{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}\}$ *est une tribu.*

Définition 5.9 *Le couple $(\Omega, \mathcal{A})$ s'appelle **espace probabilisable**.*

Exemple 5.8 $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ *munissons le de la tribu de ses parties* $\mathcal{P}(\Omega)$. $\{\Omega, \mathcal{P}(\Omega)\}$ *est un espace probabilisable.*

5.6 Réalisation d'un événement

Définition 5.10 *Soit $\omega \in \Omega$ résultat observé d'une expérience aléatoire, si $\omega \in A$ on dit que A est réalisé.*

Proposition 5.3 *Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable.*
1) $\varnothing$ est un événement jamais réalisé (impossible)
2) Ω est un événement toujours réalisé (certain)
3) A réalisé $\Leftrightarrow$ $\bar{A}$ non réalisé.
*4) A **et** B réalisés $\Leftrightarrow$ $A \cap B$ réalisé.*
*5) A réalisé **ou** B réalisé $\Leftrightarrow$ $A \cup B$ réalisé.*

Preuve. 1) $\varnothing = \bar{\Omega}$ donc $\varnothing \in \mathcal{A}$, $\varnothing$ est donc un événement et d'autre part $\omega \notin \varnothing$.
2) $\omega \in \Omega$ donc Ω est toujours réalisé.
3) A réalisé$\Leftrightarrow$ $\omega \in A \Leftrightarrow \omega \notin \bar{A} \Leftrightarrow \bar{A}$ non réalisé.
4) A ou B réalisés $\Leftrightarrow \omega \in A$ **ou** $\omega \in B \Leftrightarrow \omega \in A \cup B \Leftrightarrow A \cup B$ réalisé.
4) A **et** B réalisés $\Leftrightarrow \omega \in A$ **et** $\omega \in B \Leftrightarrow \omega \in A \cap B \Leftrightarrow A \cap B$ réalisé. ■

5.7 Exercices

Exercice 1 :
Soit l'ensemble des couples mariés d'une ville donnée. On considère les événements :
A :"l'homme a plus de quarante ans"
B :"la femme est plus jeune que l'homme"
C :"la femme a plus de quarante ans"
a) Interpréter en fonction de A, B, C l'événement le mari a plus de quarante ans, mais non sa femme.
b) Décrire en langage ordinaire les événements $A \cap B \cap \bar{C}$, $A - (A \cap B)$, $A \cap \bar{B} \cap C$, $A \cup B$.
c) Vérifier que $A \cap \bar{C} \subset B$.

Exercice 2 :
Soient A, B, deux événements. Donner une expression et représenter le diagramme de Venn des événements suivants :
a) A est réalisé et non B.
b) soit A et soit B se réalisent mais pas les deux en même temps.
c) A ou non B est réalisé.
d) ni A ni B ne sont réalisé.

Exercice 3 :

Soient A, B, C trois événements. Trouver l'expression ensembliste des événements suivants

a) A seul se réalisé,

b) A et B se réalisent mais C ne se réalise pas

c) un événement au moins se réalise.

d) un événement au plus se réalise.

e) au moins deux événements se réalisent.

f) les trois événements se réalisent.

g) aucun événement ne se réalise.

h) au plus deux événements se réalisent.

Exercice 4 :

On jette une pièce de monnaie et un dé.

a) quel est l'ensemble fondamental

b) exprimer d'une façon explicite les événements :

A : « face est un nombre pair apparaissent »

B : « un nombre 1 apparait »

C : « pile est un nombre impair apparaissent »

c) exprimer de la même façon A ou B est réalisé, B ou C sont réalisés, B seul est réalisé

Exercice 5 :

Soit A_1 et A_2 sont deux tribus. Montrer que leur intersection est une tribu.

Exercice 6 :

La réunion de deux tribus est elle une tribu ?

Exercice 7 :

Soit E un ensemble de n éléments $n = 1, 2, 3$. Combien t-il de tribus différente sur E ?

Chapitre 6

Espace probabilisé

6.1 Construction d'une probabilité

Définition 6.1 *Une probabilité sur l'espace probabilisable* $(\Omega, \mathcal{A})$ *est une application* $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to [0,1]$*, qui vérifie les deux axiomes suivantes :*
(i) $\mathbb{P}(\Omega) = 1.$
(ii) Si $A_1, A_2, ...$ *est une suite d'éléments de* $\mathcal{A}$ *deux- a-deux disjoints, alors* $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n).$

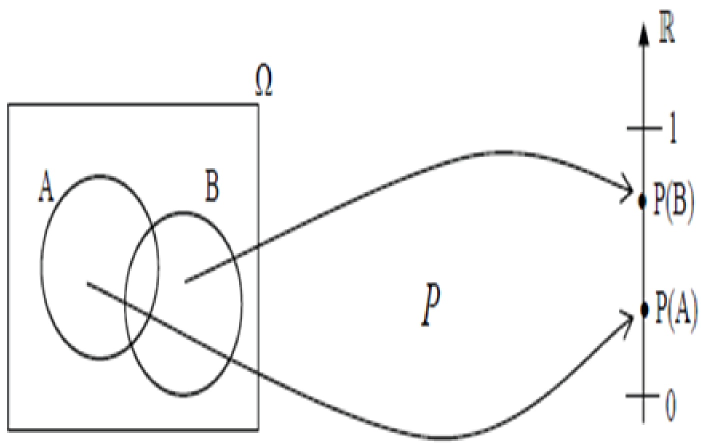


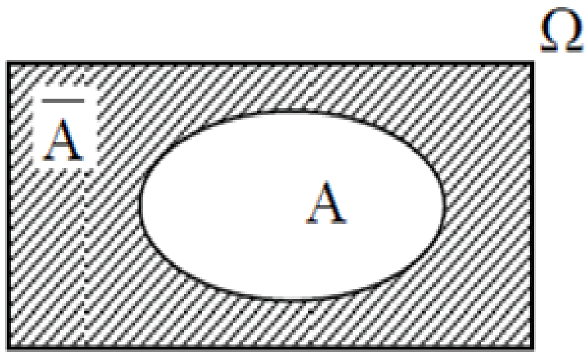
Figure 5.2 : Fonction de probabilité.

Définition 6.2 $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *s'appelle* ***espace probabilisé****.*

6.2 Propriétés d'une probabilité

Proposition 6.1 $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$

Preuve. *On a :* $A \cup \bar{A} = \Omega$ *et* $A \cap \bar{A}$ *(*A *et* $\bar{A}$ *sont incompatibles).*

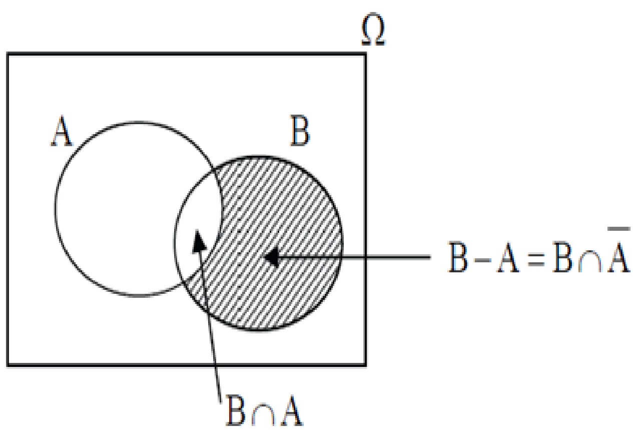


Donc : $\mathbb{P}(\Omega) = 1 = \mathbb{P}\left(A \cup \bar{A}\right) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}\left(\bar{A}\right) \Rightarrow \mathbb{P}\left(\bar{A}\right) = 1 - \mathbb{P}(A)$ ■

Corollaire 6.1 $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$

Proposition 6.2 $\mathbb{P}(B - A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(B \cap A)$

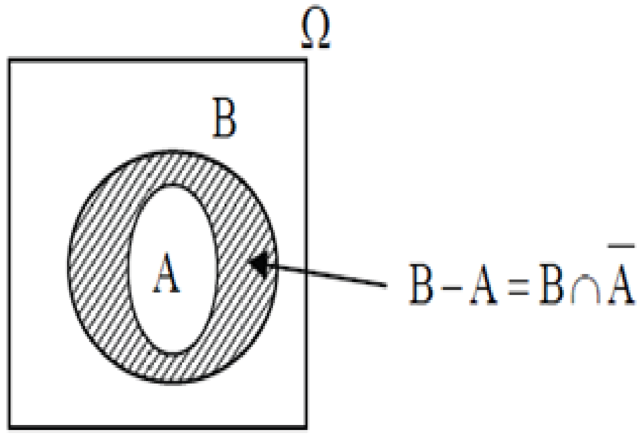
Preuve. On a : $B = \left(B \cap \bar{A}\right) \cup (B \cap A)$ et $\left(B \cap \bar{A}\right) \cup (B \cap A) = \varnothing$



Donc $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}\left(\left(B \cap \bar{A}\right) \cup (B \cap A)\right) = \mathbb{P}\left(B \cap \bar{A}\right) + \mathbb{P}(B \cap A) \Rightarrow \mathbb{P}\left(B \cap \bar{A}\right) = \mathbb{P}(B - A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(B \cap A)$ ■

Proposition 6.3 *Si* $A \subseteq B$ *alors* $\mathbb{P}(B) \geq \mathbb{P}(A)$

Preuve. $\mathbb{P}(B - A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(B \cap A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A) \geq 0 \Rightarrow \mathbb{P}(B) \geq \mathbb{P}(A)$



■

Proposition 6.4 $\forall A, B : \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(B \cap A)$

Preuve. On a : $A \cup B = A \cup (B - A)$ et $A \cap (B - A) = \varnothing$. Donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cup B) &= \mathbb{P}(A \cup (B - A)) \\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B - A) \\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(B \cap A)\end{aligned}$$

■

6.3 Espace probabilisé fini

Définition 6.3 *Soit $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_n\}$ un espace probabilisé fini et soient $p_1 = \mathbb{P}(\{\omega_i\}), ..., p_n = \mathbb{P}(\{\omega_n\})$ les probabilités des éventualités de Ω. La suite des nombres p_i, $i = 1, ..., n$, s'appelle **la distribution de probabilité** sur Ω.*

Proposition 6.5 *Les nombres p_i, $i = 1, 2, ..., n$, vérifient les propriétés suivantes :*
i) $0 \leq p_i \leq 1$, pour tout $i \in \{1, ..., n\}$.
ii) $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Preuve. Soit $\mathbb{P}$ une probabilité sur Ω, et soit $p_i = \mathbb{P}(\{\omega_i\})$.
i) Il est alors évident que $0 \leq p_i \leq 1$ pour tout $i \in \{1, ..., n\}$.
ii) On a $\Omega = \cup_{i=1}^{n} \{\omega_i\}$ donc $\mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(\cup_{i=1}^{n} \{\omega_i\}) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\{\omega_i\}) = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. ■

Définition 6.4 *On dit qu'il y a **équiprobabilité** quand tous les événements élémentaires ont la même probabilité. On dit aussi que la probabilité est **équidistribuée**.*

Proposition 6.6 *Si la probabilité est équidistribuée sur Ω, pour tout événement A, on a*

$$\mathbb{P}(A) = \frac{card\,(A)}{card(\Omega)}$$

Preuve. *Si la probabilité est équidistribuée sur Ω on a : $p \times n = 1$ d'où $p = \frac{1}{n}$. Alors pour tout $A = \cup_{i=1}^{k} \{\omega_i\}$, $k \leq n$, on a $\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(\{\omega_i\}) = \sum_{i=1}^{k} p = p \times k = \frac{k}{n} = \frac{card(A)}{card\Omega}$.* ■

En d'autres termes plutôt anciens, $\mathbb{P}(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables à } A}{\text{nombre total de caspossibles } \Omega}$.

Exemple 6.1 *On effectue une partie de pile ou face en trois coups. Quelle est la probabilité d'obtenir pile aux premier et troisième lancers ?*
Solution : *on peut modéliser cette expérience en prenant*

$$\Omega = \{(p,p,p),(p,f,p),(p,p,f),(f,p,p),(f,f,p),(p,f,f),(f,p,f),(f,f,f)\}$$

et pour famille d'´événements observables $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ (l'ensemble de toutes les parties de Ω). La pièce étant supposée symétrique, nous n'avons à priori pas de raison de supposer que l'un des 8 triplets de résultats possibles soit favorisé ou défavorisé par rapport aux autres. Nous choisirons donc $\mathbb{P}$ de sorte que tous les événements élémentaires aient même probabilité (hypothèse d'équiprobabilité), soit :

$$\forall \omega \in \Omega, \;\; \mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{Card(\Omega)} = \frac{1}{2^3}$$

L'événement dont on veut calculer la probabilité s'écrit : $\{(p,f,p),(p,p,p)\}$. D'où :

$$\mathbb{P}(\{(p,f,p),(p,p,p)\}) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$$

Exemple 6.2 *On fait remplir un questionnaire à 20 questions binaires. Quelle est la probabilité qu'un candidat répondant au hasard obtienne au moins 16 bonnes réponses ?*
Solution : *on choisit ici Ω =\{oui, non\}^{20}.Si le candidat répond complètementc au hasard, on peut considérer que chacune des 2^{20} grilles de réponses possibles à la même probabilité d'apparaitre (hypothèse d'équiprobabilité sur Ω). Pour tout $B \subset \Omega$*

$$\mathbb{P}(B) = \frac{Card\,(B)}{Card\,(\Omega)}$$

En particulier pour $B = \{$obtention d'au moins 16 bonnes réponses$\}$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \frac{C_{20}^{16} + C_{20}^{17} + C_{20}^{18} + C_{20}^{19} + C_{20}^{20}}{2^{20}} \\ &= \frac{6196}{2^{20}} = 0,006.\end{aligned}$$

6.4 Exercices

Exercice 1 :

A , B et $A \cup B$ sont trois événements de probabilités $0.4, 0.5$ et 0.6. Calculer la probabilité des événements :

a) $A \cap B$

a) $\bar{A} \cap B$

c) $A \cap \bar{B}$

d) $\bar{A} \cup B$

e) $\bar{A} \cup \bar{B}$

Exercice 2 :

On considère l'ensemble Ω des entiers de 20 à 40. On choisit l'un de ces nombres au hasard.

A : « le nombre est multiple de 3»

B : « le nombre est multiple de 3»

C : « le nombre est multiple de 3»

Calculer $P(A), P(B), P(C), P(A \cap B), P(A \cup B), P\left(A \cap \bar{C}\right)$ *et* $P\left(\bar{A} \cup \bar{C}\right)$.

Exercice 3 :

On lance trois pièces de monnaie et on compte le nombre de face.

a) Quel est l'univers de cette expérience aléatoire ?

b) Quelle est la probabilité que la face apparaisse au moins une fois ?

Exercice 4 :

On propose à Ali de lancer simultanément trois pièces de monnaie parfaitement symétriques de 10, 20 et 50 centimes, respectivement. Il pourra conserver les pièces qui présentent le côté pile.

a) Décrire l'univers.

b) Quelle probabilité a-t-il de gagner :

i) 20 centimes ?

ii) moins de 50 centimes

iii) plus de 20 centimes ?

Exercice 5 :

Dans un lot de 80 vaccins, 10 sont périmés. Si on en tire deux au hasard, quelle est la probabilité en % :

a) de tirer 0 vaccin périmé ?

b) de tirer 1 vaccin périmé ?

c) de tirer 2 vaccins périmés ?

Exercice 6 :

Deux lignes téléphoniques L_1 et L_2 aboutissent à un standard. La probabilité que la ligne L1 soit occupée est de 70%, la probabilité que la ligne L2 soit occupée est de 50% et la probabilité que les deux lignes soient occupées simultanément est de 30%. Calculer la probabilité en % de chacun des événements suivants après en avoir donné une transcription ensembliste :

a) une ligne au moins est occupée.

b) les deux lignes sont libres.

c) une ligne seulement est occupée.

Exercice 7 :

On prend au hasard 6 ampoules électriques d'un lot de 15 ampoules dont 5 sont défectueuses. Calculer la probabilité en % de chacun des événements suivants après en avoir donné une transcription ensembliste :

a) aucune ampoule ne soit défectueuse.

b) exactement une ampoule soit défectueuse.

c) exactement deux ampoules soit défectueuses

d) exactement trois ampoules soit défectueuses.

e) au moins une ampoule soit défectueuse.

f) au moins deux ampoules soit défectueuses.

Exercice 8 :

Trois chevaux A, B et C s'arrentent lors d'une course. On sait que le cheval A a deux fois plus de chance de gagner que le cheval B et que le cheval B a deux fois plus de chance de gagner que le cheval C. Calculer :

(i) la probabilité que le cheval A gagne la course.

(ii) la probabilité que le cheval C ne gagne pas la course.

Exercice 9 :

Trois hommes et deux femmes prennent part a un tournoi d'échecs. Les personnes de même sexe ont même probabilité de gagner, mais une femme a deux fois plus de chance de gagner qu'un homme. Trouver la probabilité

(i) qu'une femme remporte le tournoi,

(ii) qu'un homme remporte le tournoi.

Exercice 10 :

Six couples mariés se trouvent dans un restaurant.

a) Si deux personnes sont choisies aléatoirement, trouver la probabilité qu'elles soient mariées.

b) Si quatre personnes sont choisies aléatoirement, trouver la probabilité qu'aucun couple marié ne soit parmi ces quatre personnes.

Chapitre 7

Probabilités conditionnelles et indépendance

7.1 Probabilités conditionnelles

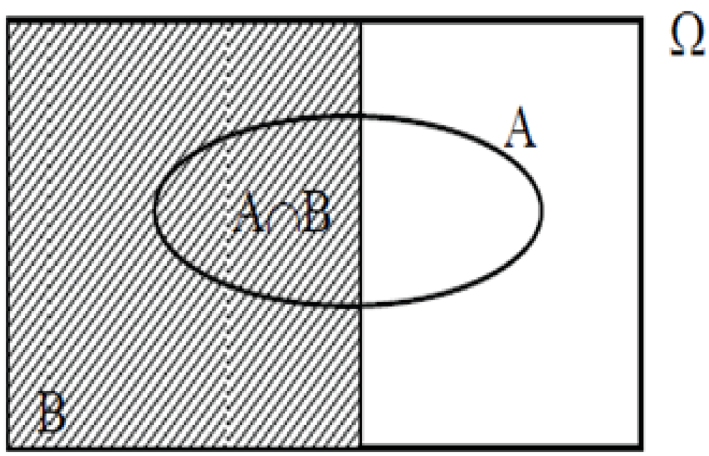
La notion de probabilité conditionnelle est essentielle en calcul de probabilités. Elle apparaît naturellement lorsqu'au cours d'une expérience aléatoire, une "information partielle" est fournie à l'expérimentateur.

Définition 7.1 *Soient* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé et* B *un événement de probabilité non nulle. Pour tout événement* A*, on appelle probabilité conditionnelle de* A *sachant* B *(i.e. sachant que* B *est réalisé) le nombre réel noté* $\mathbb{P}(A/B)$ *défini par :*

$$\mathbb{P}(A/B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

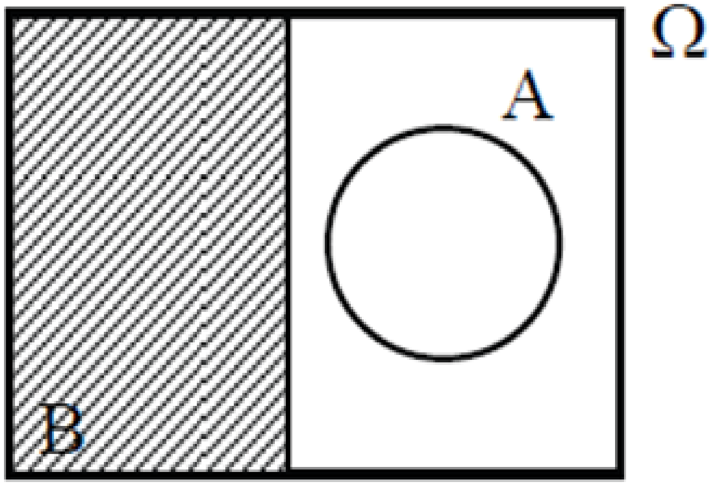
On vérifie que l'application $\mathbb{P}(.|B) : A \to [0, 1]$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Remarque 7.1 $\mathbb{P}(A/B)$ *peut s'interpréter comme le fait que* Ω *se restreint à* B *et que les résultats de* A *se restreignent à* $A \cap B$.



Remarque 7.2 *Si* A *et* B *sont incompatibles, et si* B *s'est déjà produit et donc* $\mathbb{P}(A/B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} =$

$\frac{\mathbf{0}}{\mathbb{P}(B)} = 0$



Remarque 7.3 *En général* $\mathbb{P}\left(A/B\right) \neq \mathbb{P}\left(B/A\right)$.

Exemple 7.1 *On jette un dé à* 6 *faces non truqué :* $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ *et soit les événements :*

A :“ 2 sorte” et B :“nombre pair sorte”. Donc $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{6}$, $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{6}$.

• La probabilité que “ 2 sorte ” sachant qu'il s'agit “ d'un nombre pair ” est de :

$$\mathbb{P}\left(A/B\right) = \frac{\mathbb{P}\left(A \cap B\right)}{\mathbb{P}\left(B\right)} = \frac{1}{3}$$

• La probabilité qu'un “ nombre pair sorte” sachant qu'il s'agit de 2 est de :

$$\mathbb{P}\left(B/A\right) = \frac{\mathbb{P}\left(A \cap B\right)}{\mathbb{P}\left(B\right)} = 1$$

Dans ce cas $\mathbb{P}\left(A/B\right) \neq \mathbb{P}\left(B/A\right)$.

7.2 Probabilités composées et probabilités totales

Proposition 7.1 ***(Formule des probabilités composées)***

i) si A*et* B *sont 2 événements tels que* $\mathbb{P}(B) \neq 0$*, alors* $\mathbb{P}\left(A \cap B\right) = \mathbb{P}\left(B\right)\mathbb{P}\left(A/B\right)$

ii) si A*et* B *sont 2 événements tels que* $\mathbb{P}(A) \neq 0$*, alors* $\mathbb{P}\left(A \cap B\right) = \mathbb{P}\left(A\right)\mathbb{P}\left(B/A\right)$

iii) si $A_1, A_2, ..., A_n$ *sont* n *événements tels que* $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{n-1})$*, alors* $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2/A_1)\mathbb{P}(A_3/A_1 \cap A_2)\mathbb{P}(A_n/A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{n-1})$

Preuve. i) et ii) résulte de $\mathbb{P}\left(A/B\right) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$ et $\mathbb{P}\left(B/A\right) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$. iii) démonstration par récurrence. ∎

Proposition 7.2 ***(Formule des probabilités complètes ou totales)*** *Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $\{A_i\}_{i\in I}$, $(I \subset \mathbb{N})$, un système complet d'événements de probabilité non nulle, i.e. $\Omega = \cup_{i\in I} A_i$, les A_i étant deux à deux incompatibles et tels que $\mathbb{P}(A_i) \neq 0$ pour tout $i \in I$. Alors, pour tout événement B, on a*

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(B \cap A_i) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B/A_i)$$

Preuve. On a $B = B \cap \Omega = B \cap \left(\cup_{i\in I} A_i\right) = \cup_{i\in I} (B \cap A_i)$, les $B \cap A_i$ étant deux à deux incompatibles, donc $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}\left(\cup_{i\in I} (B \cap A_i)\right) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(B \cap A_i) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B/A_i)$. ■

Exemple 7.2 *Soit trois urnes, la première contenant une boule noire et une boule rouge, la deuxième une boule noire et deux boules rouges et la troisième deux boules noires. On choisit au hasard une urne et puis une boule à l'intérieur de cette urne. Quelle est la probabilité de tirer une boule rouge ?*
***Solution** : soit B :"boule rouge tirée" et A_k :"je choisis la $k-$ieme urne.". Calculer tel quel la probabilité de B peut s'avérer l'égèrment complique. Pour faciliter les choses, on peut donc décomposer $\mathbb{P}(B)$ en une somme en conditionnant sur l'urne choisie. En effet, si l'urne choisie est connue, il devient facile de calculer $\mathbb{P}(B/A_k)$. Par la formule des probabilités totales, on a donc*

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B) &= \sum_{k=1}^{3} \mathbb{P}(B/A_k)\mathbb{P}(A_k) \\
&= \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{3} \mathbb{P}(B/A_k) \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + 0\right)
\end{aligned}$$

7.3 Formule de Bayes

Proposition 7.3 ***(Formule de Bayes)*** *Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $\{A_i\}_{i\in I}$, $(I \subset \mathbb{N})$, un système complet d'événements de probabilité non nulle. Alors, pour tout événement B de probabilité non nulle, on a*

$$\text{pour tout } j \in I,\ \mathbb{P}(A_j/B) = \frac{\mathbb{P}(A_j)\mathbb{P}(B/A_j)}{\sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B/A_i)}.$$

Preuve. Par définition, $\mathbb{P}(A_j/B) = \frac{\mathbb{P}(A_j \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$. Les formules des probabilités composées et complètes donnent, respectivement :

$$\mathbb{P}(A_j \cap B) = \mathbb{P}(A_j)\mathbb{P}(B/A_j) \text{ et } \mathbb{P}(B) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B/A_i).$$

■

Remarque 7.4 *Cette formule s'interprète souvent de la façon suivante : les A_i sont les différentes causes pouvant conduire à la réalisation de B. Connaissant les probabilités $\mathbb{P}(A_j)$ de chaque cause et celles $\mathbb{P}(B/A_j)$ de B conditionnellement aux causes A_i, on calcule la probabilité $\mathbb{P}(A_j/B)$ que la réalisation de B soit due à la cause A_j.*

Exemple 7.3 *Un questionnaire à choix multiples propose m réponses pour chaque question. Soit p la probabilité qu'un étudiant connaisse la réponse à une question donnée. S'il ignore la réponse, il choisit au hasard l'une des réponses proposées. Quelle est pour le correcteur la probabilité qu'un étudiant connaisse vraiment la bonne réponse lorsqu'il l'a donnée ?*

Solution : *notons*

B :*"l'étudiant donne la bonne réponse"*,

C :*"l'étudiant connaît la bonne réponse"*.

On cherche $\mathbb{P}(C|B)$. Avec ces notations, les données de l'énoncé peuvent se traduire par :

$\mathbb{P}(C) = p$, $\mathbb{P}(\bar{C}) = 1 - p$, $\mathbb{P}(B|C) = 1$, $\mathbb{P}(B|\bar{C}) = \frac{1}{m}$ *On en déduit :*

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(C|B) &= \frac{\mathbb{P}(C \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(B|C)\mathbb{P}(C)}{\mathbb{P}(B|C)\mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(B|\bar{C})\mathbb{P}(\bar{C})} \\
&= \frac{1 \times p}{1 \times p + \frac{1}{m}(1-p)} \\
&= \frac{mp}{1 + (m-1)\,p}
\end{aligned}$$

Pour p fixe, $\mathbb{P}(C|B)$ est une fonction croissante de m, les deux bornes étant $\mathbb{P}(C|B) = p$ (cas $m = 1$) et $\mathbb{P}(C|B) \to 1$ ($m \to \infty$). D'autre part pour m fixé, $\mathbb{P}(C|B)$ est une fonction croissante de p. On a pour $p > 0$:

$$\frac{\mathbb{P}(C|B)}{p} = \frac{m}{1 + (m-1)\,p} \geq 1$$

l'égalité n'étant possible que pour $p = 1$. Tout ceci est conforme à l'intuition.

Exemple 7.4 *Un test sanguin à une probabilité de 0.95 de détecter un certain virus lorsque celui ci est effectivement présent. Il donne néanmoins un faux résultat positif pour 1% des personnes non infectées. Si 0.5% de la population est porteuse du virus, quelle est la probabilité qu'une personne ait le virus sachant qu'elle a un test positif ?*

Solution : *notons*

V :*"la personne testée a le virus"*,

T :*"la personne testée a un test positif"*.

On cherche $\mathbb{P}(V|T)$. *Or on sait que :* $\mathbb{P}(V) = 0.005$, $\mathbb{P}(T|V) = 0.95$, $\mathbb{P}(T|Vc) = 0.01$. *On en déduit :*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(V|T) &= \frac{\mathbb{P}(V \cap T)}{\mathbb{P}(T)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(T|V)P(V)}{\mathbb{P}(T|V)\mathbb{P}(V) + \mathbb{P}(T|\bar{V})\mathbb{P}(\bar{V})} \\ &= \frac{0.95 \times 0.005}{0.95 \times 0.005 + 0.01 \times 0.995} = 0.323 \end{aligned}$$

On voit ainsi que contrairement à ce que l'on aurait pu croire le test n'est pas fiable : si la personne présente un test positif, la probabilité qu'elle ne soit pas porteuse du virus est deux fois plus élevée que celle qu'elle le soit !

7.4 Evénements indépendants

Définition 7.2 *Soient* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé. Deux événements* A *et* B *sont dits* ***indépendants*** *(en probabilité) si et seulement si* $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$.

Remarque 7.5 *La relation d'indépendance est symétrique : si* A *est indépendant de* B *alors* B *est indépendant de* A.

Remarque 7.6 *Si l'un des deux événements* A *ou* B *est quasi-impossible, alors* A *et* B *sont indépendants. En effet, supposons que* $\mathbb{P}(A) = 0$*; comme* $A \cap B \subset A$*, on a* $0 \leq \mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(A)$*, donc* $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$*, et ainsi* $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = 0$

Exemple 7.5 *Soit deux jets successifs d'une pièce de monnaie.* $\Omega = \{(p,p), (f,f), (p,f), (f,p)\}$. *Soit Les événements*
A *:"pile au premier jet"=*$\{(p,p), (p,f)\}$*,*
B *:"face au deuxième jet"=*$\{(f,f), (p,f)\}$.
$A \cap B$ *:"pile au premier jet et face au deuxième jet"=*$\{(p,f)\}$
On a : $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}$ *et* $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{4}$
Ces probabilités vérifiant l'égalité $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$*,* A *et* B *sont des événements indépendants.*

Remarque 7.7 *Ne pas confondre indépendance et incompatibilité de* A *et* B !*. Noter que l'indépendance est relative à la probabilité* $\mathbb{P}$ *choisie, alors que l'incompatibilité (*$A \cap B = \varnothing$*) ne l'est pas.*

Remarque 7.8 *L'indépendance de deux événements* A*et* B *n'est pas une propriété intrinsèque aux événements, elle est toujours relative à l'espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *que l'on a choisi.*

Exemple 7.6 *Une urne contient* 12 *boules numérotées de* 1 *à* 12*. On en tire une au hasard et on considère les événements :*
A :*"tirage d'un nombre pair"*, B :*"tirage d'un multiple de 3"*.
L'espace probabilisé qui s'impose naturellement ici est $\Omega = \{1, ..., 12\}$ *muni de l'équiprobabilité* P*. Les événements* A *et* B *s'écrivent :* $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$*,* $B = \{3, 6, 9, 12\}$*,* $A \cap B = \{6, 12\}$*. On a :* $\mathbb{P}(A) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(B) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$, $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ *et* $\mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$*, donc* A *et* B *sont indépendants.*
On rajoute maintenant dans l'urne une boule numérotée treize et on recommence l'expérience. Les événements A *et* B *restent les mêmes, mais le modèle a changé. On a maintenant l'équiprobabilité* $\acute{\mathbb{P}}$ *sur* $\Omega = \{1, ..., 13\}$ *et :* $\acute{\mathbb{P}}(A) = \frac{6}{13}$, $\acute{\mathbb{P}}(B) = \frac{4}{13}$ *et* $\acute{\mathbb{P}}(A \cap B) = \frac{2}{13}$ *mais* $\acute{\mathbb{P}}(A)\,\acute{\mathbb{P}}(B) = \frac{6}{13} \times \frac{4}{13} = \frac{24}{169} \neq \acute{\mathbb{P}}(A \cap B)$ *, donc* A *et* B *ne sont plus indépendants.*
Un peu de réflexion permet de relier ces résultats calculatoires avec la notion intuitive d'indépendance. Dans le premier cas, la proportion des multiples de trois parmi les pairs est la même que parmi les impairs. Le fait de savoir que la boule tirée est paire ne modifie en rien notre information sur B*. Par contre dans le deuxième cas, l'ajout de la treizième boule modifie la proportion des multiples de trois : elle est plus élevée chez les pairs que chez les impairs. Donc le fait de savoir que la boule tirée est paire augmente un peu la probabilité que nous pouvons attribuer à* B*.*

Proposition 7.4 *Si* A *et* B *sont indépendants, il en est de même pour les paires d'événements* A *et* $\bar{B}$*,* $\bar{A}$ *et* B*,* $\bar{A}$ *et* $\bar{B}$*.*

La vérification est laissée en exercice.

7.5 Indépendance mutuelle

Plus généralement, on définit l'indépendance mutuelle de plusieurs événements comme suit.

Définition 7.3 *Soient* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé et* n *événements* $A_1, A_2, ..., A_n$*. Ces* n *événements sont dits* ***(mutuellement)*** *indépendant si et seulement si pour toute partitions tels que* $I \subset \{1, 2, ..., n\}$, $\mathbb{P}(\bigcap_{i \in I} A_i) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)$.

Exemple 7.7 *Un joueur lance un dé à 6 faces, trois fois. Cherchons la probabilité qu'il obtienne un nombre pair à chaque lancer. Soit les événements :*
A_1 :*"nombre pair au premier lancer"*,
A_2 :*"nombre pair au deuxième lancer"*,
A_3 :*"nombre pair au troisième lancer"*,

$A_1 \cap A_2 \cap A_3$:“*nombre pair à chaque lancer*”.
On a $\mathbb{P}(A_1) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(A_2) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(A_3) = \frac{1}{2}$ *et* $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(A_3)$. *Donc* A_1, A_2 *et* A_3 *sont des événements indépendants.*

Remarque 7.9 *L'indépendance mutuelle implique évidemment l'indépendance deux à deux, mais et la réciproque est fausse.*

Exemple 7.8 *Une urne contient quatre jetons : un bleu, un blanc, un rouge et un bleu-blanc-rouge. On en tire un au hasard. Considérons les trois événements*
A :“*le jeton tiré contient du bleu*”, B :“*le jeton tiré contient du blanc*” *et* C :“*le jeton tiré contient du rouge*”. *Il est clair que* $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = 2/4 = 1/2$. *D'autre part :* $\mathbb{P}(A \backslash B) = \mathbb{P}(\textit{tricolore}) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B)$ *et de même* $\mathbb{P}(B \backslash C) = 1/4 = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$, $\mathbb{P}(C \backslash A) = 1/4 = \mathbb{P}(C)\mathbb{P}(A)$. *Ainsi les événements* A, B, C *sont deux à deux indépendants. D'autre part* $\mathbb{P}(A|B \cap C) = 1$ *car* $B \cap C$:“*tricolore*”. *Donc la connaissance de la réalisation simultanée de* B *et* C *modifie notre information sur* A. *La notion d'indépendance deux à deux n'est donc pas suffisante pour traduire l'idée intuitive d'indépendance de plusieurs événements.*

7.6 Exercices

Exercice 1 :
Montrer que si A, B, C *sont indépendants,* $A \cup B$ *et* C *sont indépendants. Généraliser.*

Exercice 2 :
On lance un dé équilibré à 6 *faces numérotées de* 1 *à* 6. *On considère les événements* A :“*on obtient l'as*” *et* B :“*on obtient un numéro pair*”. *Vérifier que* $P(A|\bar{B}) \neq 1 - P(A|B)$.

Exercice 3 :
On suppose que les événements $A_1, ..., A_5$ *sont indépendants. Donner une expression plus simple des probabilités :*
a) $P(A_1|A_3)$
b) $P(A_3|A_2 \cap A_4)$
c) $P(A_1|A_3 \cap A_2)$
d) $P(A_1 \cap A_2|A_3 \cap A_4 \cap A_5)$

Exercice 4 :
La définition de l'indépendance de trois événements s'écrit explicitement avec 4 *égalités. Combien d'égalités faut-il pour écrire explicitement celle de l'indépendance de* n *événements ?*

Exercice 5 :

Dans un groupe de 30 étudiants, dont 18 filles et 12 garçons, on choisit au hasard 3 étudiants. Sachant que parmi eux il y a au moins deux filles, quelle est la probabilité qu'il y en ait trois ?

Exercice 6 :

Une urne contient 5 boules blanches et 7 rouges. On effectue 3 tirages d'une boule suivant la procédure suivante. A chaque tirage on prend une boule et on la remet dans l'urne en y ajoutant une boule de même couleur. Calculer les probabilités que l'échantillon de trois boules tiré contienne :

a) Aucune blanche.

b) Exactement une blanche.

c) Trois blanches.

d) Exactement deux blanches.

Exercice 7 :

Une compagnie d'assurance répartit ses clients en trois classes R_1, R_2 et R_3 : les bons risques, les risques moyens et les mauvais risques. Les effectifs des ces trois classes représentent 20% de la population totale pour la classe R_1, 50% pour R_2 et 30% pour R_3. Les statistiques indiquent que les probabilités d'avoir un accident au cours de l'année pour une personne de l'une de ces trois classes sont respectivement de 0.05, 0.15 et 0.30.

1) Quelle est la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la population ait un accident dans l'année ?

2) Si M. Ali n'a pas eu d'accident cette année, quelle est la probabilité qu'il soit un bon risque ?

Exercice 9 :

On considère une urne U contenant 9 boules blanches et 1 boule noire, et une urne V contenant 3 boules blanches et 7 boules noires. On lance un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6, et on effectue deux tirages d'une boule avec remise dans l'urne U si le dé amène l'as ou dans l'urne V si le dé n'amène pas l'as. On considère les événements

U :"on tire dans l'urne U",

V :"on tire dans l'urne V",

$B_{i:}$:"la i-ème boule est blanche", et N_i :"la i-ème boule est noire V" pour $i = 1, 2$.

1) Les événements B_1 et N_2 sont-ils indépendants ?

2) Sachant que l'on a obtenu une boule blanche puis une boule noire, de quelle urne est-il plus probable qu'on les ait tiré ?

Exercice 10 :

Dans une classe de $N+1$ élèves, la solution d'un exercice de Probabilités est trouvée par un seul élève. Il la transmet à l'un de ses camarades choisi au hasard. Celui-ci transmet alors la solution à l'un de ses camarades choisi au hasard. Ce processus se répétant n fois (il y a donc n transmissions de la solution).

a) (i) Calculer la probabilité que la solution ne soit pas répétée à celui qu'il l'avait trouvée.

(ii) Calculer la probabilité que la solution ne soit jamais répétée à un élève l'ayant lui-même transmise.

b) Reprendre la question a) (i) en supposant qu'à chaque étape, la solution n'est plus transmise à un seul élève mais à un groupe de k élèves ($k \geq 1$) choisis au hasard.

Bibliographie

[1] G. Calot. Cours de statistique descriptive, Dunod, Paris 1984.

[2] A. Liorzou, A. Initiation pratique à la statistique, Eyrlles, Paris 1980.

[3] J.R. Barra. Notion fondamentales de statistique mathématiques.

[4] M. Métivier. Notion fondamentales de la théorie des probabilités.

[5] G. Calot. Cours de calcul des probabilités, Dunod, Paris 1984.

[6] G. Calot. Exercice de calcul des probabilités Dunod, Paris 1984.

[7] M. Cottrel, V. Genon-Catalot, C. Duamel et T. Meyre. Exercice de probabilités, cassini, Paris 1999.

[8] S.M. Ross. Initiation aux probabilités, Presses polytechniques et unversitaire romandes, 2000.

[9] J.P. Delmas. Introduction aux probabilités, Ellipses, Paris 1993.

[10] J.P. M. Mandry. Probabiliés cours et travaux diriges, Office des publications universitaires, Alger 1982.