Faculté des Sciences Exactes et SNV - Univ. OEB
Département de Mathématiques et d'informatique
2ème année Master Mathématiques Appliquées (2022-2023)
Éxamen Théorie du Contrôle
Nombre de pages de l'énoncé : 1. Coefficients : 2. crédits : 4.

Le 19-01-2023 de 09 à 10h30

Exercice 1 ***(8 pts)*** *Soient E un espace de Banach et $\{\mathcal{S}(t)\}_{t\geq 0}$ un $\mathcal{C}_0$-semi-groupe sur E de générateur infinitésimal A pour lequel il existe $\omega \in \mathbb{R}$ et $M \geq 1$ tel que : $\|\mathcal{S}(t)\| \leq Me^{\omega t}, \forall t \geq 0$.*

On pose $\mathcal{T}(t) = e^{-\omega t}\mathcal{S}(t), \forall t \geq 0$.

1. *Montrer que $\{\mathcal{T}(t)\}_{t\geq 0}$ est un $\mathcal{C}_0$-semi-groupe fortement continu sur E.*
2. *Déterminer le générateur infinitésimal de $\{\mathcal{T}(t)\}_{t\geq 0}$ et son domaine de définition.*
3. *En déduire que pour tout $t \geq 0$ on a : $(A - \omega I)\int_0^t e^{-\omega s}\mathcal{S}(s)\,x ds = e^{-\omega t}\mathcal{S}(t)\,x - x$, si $x \in E$.*

Exercice 2 ***(12 pts)*** *Soit $T = 2\pi$ et $\mathcal{U} = [-1, 1]$. On considère le système de contrôle linéaire d'un oscillateur harmonique suivant :*

$$\begin{cases} y''(t) + y(t) & = & u(t), t \in [0, T], \\ (y(0), y'(0)) & = & (y_0, y_1) \in \mathbb{R}^2, \end{cases} \tag{1}$$

où $u \in L^2([0, T], \mathbb{R})$ est une fonction de contrôle de ce système.

Supposons qu'on cherche un contrôle qui transfère le point $y_0 = (1, 0)^t$ au point final $y_1 = (0, 0)^t$ au temps T. Avec la minimisation de la fonctionnelle (énergie) $J(v) = \int_0^T u^2(t)dt$.

1. *Mettre le système (1) sous la forme usuelle $Y' = AY + Bu$ et $Y(0) = Y_0$ où Y est un vecteur, A et B sont deux matrices à préciser.*
2. *Montrer que la paire (A, B) est contrôlable.*
3. *Déterminer la grammienne de contrôlabilité.*
4. *Calculer le contrôle $\overline{u}(t)$ qui transfère le système de l'état initial $y(0) = y_0$ a un autre état y_1 dans le temps fini T.*
5. *On suppose dans la suite que $u \in L^\infty(]0, T[, \mathcal{U})$ et que T n'est plus fixé. On souhaite rejoindre l'origine avec un contrôle $u(.)$ en temps T minimal.*
   - *Déterminer les valeurs propres de A.*
   - *Est-ce-que tout point du système peut être conduit à l'origine en temps fini.*
   - *Étudier l'existence d'une trajectoire temps-optimale.*

Solution 1 *1.* $\mathcal{T}(0)=e^{-\omega 0}\mathcal{S}(0)=I.$

$\mathcal{T}(t+s)=e^{-\omega(t+s)}\mathcal{S}(t+s)=e^{-\omega t}e^{-\omega s}\mathcal{S}(t)\mathcal{S}(s)=e^{-\omega t}\mathcal{S}(t)e^{-\omega s}\mathcal{S}(s)=\mathcal{T}(t)\mathcal{T}(s).$

$\lim\limits_{t\longrightarrow 0}\mathcal{T}(t)x=x$ *puisque :*

$$\begin{aligned}\|\mathcal{T}(t)x-x\| &= \left\|e^{-\omega t}\left(\mathcal{S}(t)x-x\right)+\left(e^{-\omega t}-1\right)x\right\| \\ &\leq \left\|e^{-\omega t}\right\|\underbrace{\left\|\left(\mathcal{S}(t)x-x\right)\right\|}_{\longrightarrow 0}+\underbrace{\left\|e^{-\omega t}-1\right\|}_{\longrightarrow 0}\|x\|,\end{aligned}$$

donc $\lim\limits_{t\longrightarrow 0}\mathcal{T}(t)x=x.$

Evidemment $\mathcal{T}(t)$ *est un opérateur* ***linéaire****, et en plus, on a :*

$$\|\mathcal{T}(t)\|\leq e^{-\omega t}Me^{\omega t}=M,\forall t\geq 0,$$

donc $\{\mathcal{T}(t)\}_{t\geq 0}$ *est un opérateur* ***uniformément borné.***

Alors $\{\mathcal{T}(t)\}_{t\geq 0}$ *est un* C_0***-semi-groupe d'opérateur linéaire borné sue*** $\mathbf{E}$.

. . . . . ***(1+1+1 pts)***

2. *Soit* A *le générateur infinitésimal du* C_0*-semi-groupe* $\{\mathcal{S}(t)\}_{t\geq 0}$.

Si B *est le générateur infinitésimal du* C_0*-semi-groupe* $\{\mathcal{T}(t)\}_{t\geq 0}$.

Pour tout $x\in\mathcal{D}(A)$*, nous avons*

$$\begin{aligned}\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{\mathcal{T}(h)x-x}{h} &= \lim_{h\longrightarrow 0}\frac{e^{-\omega h}\mathcal{S}(h)x-x}{h}=\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{\left(e^{-\omega h}-1\right)\mathcal{S}(h)x}{h}+\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{\mathcal{S}(h)x-x}{h} \\ &= -\omega x+Ax=(A-\omega I)x,\end{aligned}$$

d'où il résulte que $x\in\mathcal{D}(B)$ *et* $Bx=(A-\omega I)x.$

Soit $x\in\mathcal{D}(B)$*. Alors, nous obtenons*

$$\begin{aligned}\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{\mathcal{S}(h)x-x}{h} &= \lim_{h\longrightarrow 0}\frac{e^{\omega h}\mathcal{T}(h)x-x}{h}=\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{\left(e^{\omega h}-1\right)\mathcal{T}(h)x}{h}+\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{\mathcal{T}(h)x-x}{h} \\ &= \omega x+Bx=(B+\omega I)x,\end{aligned}$$

d'où il vient que $x\in\mathcal{D}(A)$ *et* $Ax=(B+\omega I)x.$

Par conséquent $D(B)=D(A)$ ***et*** $B=A-\omega I.$

. . . . . ***(1.5+1.5 pts)***

3. *Selon la propriété dans le cours avec sa preuve à* $\mathcal{T}(t)$ *on obtient :*

Pour tout $x\in E$ *et tout* $t>0$,

$$B\int_0^t\mathcal{T}(s)xds=\mathcal{T}(t)x-x,$$

(où B est le générateur infinitésimal de $\mathcal{T}(t)$).

En remplaçant $\mathcal{T}(t) = e^{-\omega t}\mathcal{S}(t)$ et $B = A - \omega I$ par leurs valeurs on obtient :

$$(A - \omega I) \int_0^t e^{-\omega s}\mathcal{S}(s)\, x ds = e^{-\omega t}\mathcal{S}(t)\, x - x.$$

. . . . **(1+1 pts)**

***

Solution 2 *1. Posons $Y = (y, y')^T$. Alors, le système (1) se met sous la forme $Y' = AY + Bu$ avec*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

. . . . **(1+1 pts)**

2. On a : $\dim(A) = 2$. Est-ce que le rang de la matrice par block $[B \mid AB] = 2$

Le rang de $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 2$ puisque le déterminant n'est pas nul, alors d'après la règle de Kalman on a : la paire (A, B) est contrôlable.

. . . . **(1 pt)**

3. On calcul tout d'abord e^{tA}, on obtient : $e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$. On applique le théorème de la matrice Grammienne de contrôlabilité, on trouve que :

$$\begin{aligned} G &= G(0, 2\pi) = \int_0^{2\pi} e^{(2\pi - s)A} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} e^{(2\pi - s)A^T} ds \\ &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \sin^2 s & -\sin s \cos s \\ -\sin s \cos s & \cos^2 s \end{pmatrix} ds \\ &= \pi I. \end{aligned}$$

. . . . **(1+1 pts)**

4. $\overline{u}(t) = B^T S^T (2\pi - t)\, y = B^T S^T (2\pi - t) \underbrace{y(2\pi, y_0, u)}_{= y_1}$. Donc,

$\overline{u}(t) = B^T S^T (2\pi - t)\, y_1 = B^T S^T (2\pi - t) \left\{ S(2\pi)\, y_0 + \int_0^{2\pi} S(2\pi - t)\, Bu(t) dt \right\}$.

Et on a : $y_1 = S(2\pi)\, y_0 + Lu$ donc $y_1 - S(2\pi)\, y_0 = Lu$.

Donc $G^{-1}\{y_1 - S(2\pi)\, y_0\} = G^{-1}Lu = \left(L^T\right)^{-1} L^{-1}Lu = \left(L^T\right)^{-1} u = y$. Finalement

$$\overline{u}(t) = B^T S^T (2\pi - t)\, y = B^T S^T (2\pi - t)\, G^{-1} \{y_1 - S(2\pi)\, y_0\}.$$

$G^{-1}\{y_1 - S(2\pi)\, y_0\} = \frac{-1}{\pi}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, *alors*

$$\overline{u}(t) = \frac{-1}{\pi}\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(2\pi - t) & -\sin(2\pi - t) \\ \sin(2\pi - t) & \cos(2\pi - t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{\pi}\sin t$$

est le contrôle désiré.

. . . . ***(2 pts)***

5. ***(a)*** $\det(A - \lambda I_2) = \lambda^2 + 1 = 0$, *donc les valeurs propres de* A *sont :* $\lambda_{1,2} = \pm i$.

   . . . . ***(1 pt)***

   (b) *On a :* $0 \in \overbrace{[-1,1]}^{\circ}$, *la partie réelle des valeurs propres de* A *est nulle et* $[-1,1]$ *est compact et le couple* (A, B) *satisfait le critère de Kalman. Par théorème, on en déduit tout point du système peut être conduit à l'origine en temps fini.*

   . . . . ***(3 pts)***

   (c) *Puisque* $[-1,1]$ *est compact, on en déduit qu'il existe une trajectoire temps-optimale.*

   . . . . ***(1 pt)***

I. Rezzoug