Faculté des Sciences Exactes et SNV - Univ. OEB
Département de Mathématiques et d'informatique
1ère année Master Mathématiques Appliquées (2022-2023)
Éxamen Méthodes Numériques pour EDO et EDP
Nombre de pages de l'énoncé : 1. Coefficients : 2. crédits : 5.

Le 19-01-2023 de 13 à 14h30

(10 pts. 45 mn) **Questions du cours.**

1. Donner les définitions de la continuité et de la coercivité d'une forme bi-linéaire.
2. Enoncer le lemme de Céa.
3. On pose $\Omega = (0,1)$. Soit la formulation variationnelle (1) avec $f \in L^2(\Omega)$ et $y \in H^1(\Omega)$:
$$\int_I y'v'dx + 2\int_I yvdx + y(0)\,v(0) = \int_I fvdx, \forall v \in H^1(\Omega). \tag{1}$$
Déterminer le problème aux limites dont sa solution faible est y.
4. On considère le problème de Poisson sur $\Omega = (0,1)$: $-y''(x) = 1$ avec des conditions aux bord de type Neumann $y'(0) = y'(1) = 0$.
Écrire la matrice de rigidité obtenue pour l'approximation par éléments finis P_2 en prenant $h = \frac{1}{2}$.

Exercice 1 *(10 pts. 45 mn) On considère le problème de Poisson avec des conditions aux bord de type Neumann :*

$$\begin{cases} -y''(x) + \gamma y(x) &= f(x), \quad x \in (0,1), \\ y'(0) &= 0, \\ y'(1) &= 0, \end{cases} \tag{2}$$

où $\gamma > 0$ est une constante et $f \in L^2((0,1))$.

1. *Écrire la formulation variationnelle correspondant à (2). Montrer qu'elle admet une solution unique $y \in H^1((0,1))$.*
2. *Écrire le problème approché correspondant, obtenu par application de la méthode des éléments finis linéaires. Déterminer le terme générique de la matrice de rigidité correspondante et montrer que le problème approché admet une unique solution y_h.*
3. *Que peut-on dire concernant la convergence de y_h vers y ? Quel est l'ordre de convergence de la méthode ?.*

Corrigé Type.

1. Soit a une forme bi-linéaire sur un espace de Hilbert $\mathcal{V}$:

   a est continue, c'est-à-dire :

   $$\exists C > 0 \text{ t.q. } |a(y,v)| \leq C \|y\| \|v\|, \quad \forall y, v \in \mathcal{V}.$$

   a est coercive (elliptique), c'est-à-dire :

   $$\exists \alpha > 0 \text{ t.q. } a(y,y) \geq \alpha \|y\|^2, \quad \forall y \in \mathcal{V}.$$

   .... (1+1 pts)

2. **Lemme de Céa :** On suppose qu'il existe une solution $y \in \mathcal{V}$. Soit $\mathcal{V}_h \subset \mathcal{V}$ un sous-espace d'approximation de dimension finie quelconque et soit $y_h \in \mathcal{V}_h$ la solution approchée. Alors il existe une constante $C \geq 1$ indépendante de h telle que

   $$\begin{aligned} \|y - y_h\|_{H^1(0,1)} &\leq C.dist(y, \mathcal{V}_h) \\ &\leq C. \inf_{v_h \in \mathcal{V}_h} \|y - v_h\|_{H^1(0,1)} \end{aligned}$$

   .... (1+1 pts)

3. En utilisant (1) et appliquant la formule d'intégration par parties (au sens inverse), on obtient :

   $$-\int_I y''v dx + (y'(1)v(1) - y'(0)v(0)) + 2\int_I yv dx + y(0)v(0) = \int_I fv dx, \forall v \in H^1(\Omega).$$

   Tenant compte du fait que $-y'' + 2u = f$ [1](comme $(y,f) \in L^2(\Omega)^2$ donc $y'' = 2y - f \in L^2(\Omega)$, donc $y \in H^2(\Omega)$), ceci devient :

   $$y'(1)v(1) + (-y'(0) + y(0))v(0) = 0, \forall v \in H^1(\Omega).$$

   On conclut que y est la solution faible du problème de Robin :

   $$\begin{cases} -y'' + 2y &= f \text{ dans } \Omega, \\ y'(0) &= y(0), \\ y'(1) &= 0. \end{cases}$$

   .... (1+1+1 pts)

   Le terme générique de la matrice de rigidité est

   $$a_{ij} = \int_0^1 \phi_i'(x)\phi_j'(x)dx, \quad \forall 0 \leq i,j \leq 2.$$

[1] On a $\mathcal{D}(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ et, en utilisant (1) et le fait que les fonctions dans $\mathcal{D}(\Omega)$ sont nulles sur $\partial\Omega$, d'où $-y'' + 2y = f$ dans I, au sens des distributions.

La matrice A est de la forme suivante (avec $\frac{1}{3h} = \frac{2}{3}$)

$$A = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{pmatrix}.$$

. . . . (1+1+1 pts)

***

Solution 1 1. *Multipliant l'équation (2) par une fonction test $v \in \mathcal{V} = H^1((0,1))$ et intégrant, nous obtenons*

$$-y'(x)v(x)\mid_0^1 + \int_0^1 (y'(x)v'(x) + \gamma y(x)v(x))\,dx = \int_0^1 f(x)\,v(x)\,dx.$$

Autrement dit, la formulation variationnelle de (2) est de la forme :

$$(FV) : \text{trouver } y \in \mathcal{V} \text{ tel que } \forall v \in \mathcal{V}, \underbrace{\int_0^1 (y'v' + \gamma yv)(x)\,dx}_{a(y,v)} = \underbrace{\int_0^1 f(x)\,v(x)\,dx}_{l(v)}.$$

. . . . *(1 pt)*

Le théorème de Lax-Milgram s'applique et le problème variationnelle (FV) admet une unique solution puisque :

$|a(y,v)| = \left|\int_0^1 (y'v' + \gamma yv)(x)\,dx\right| \leq \max(1,\gamma)\,\|y\|_{H^1}\,\|v\|_{H^1}.$

$a(y,y) \geq \min(1,\gamma)\,\|y\|_{H^1}^2.$

$|l(v)| = \left|\int_0^1 f(x)\,v(x)\,dx\right| \leq \|f\|_{L^2}\,\|v\|_{H^1}.$

Posant $v = y$ dans la formulation correspondente, nous obtenons $\min(1,\gamma)\,\|y\|_{H^1}^2 \leq a(y,y) = l(y) \leq \|f\|_{L^2}\,\|y\|_{H^1}$ *et donc* $\|y\|_{H^1} \leq \frac{\|f\|_{L^2}}{\min(1,\gamma)}$.

. . . . *(1+1+1 pts)*

2. *Le problème approché associé à (2) est donné par*

$$(FV)_h : \text{trouver } y_h \in \mathcal{V}_h \text{ tel que } \forall v_h \in \mathcal{V}_h, \underbrace{\int_0^1 (y_h'v_h' + \gamma y_h v_h)(x)\,dx}_{a(y_h,v_h)} = \underbrace{\int_0^1 f(x)\,v_h(x)\,dx}_{l(v_h)},$$

où

$$\mathcal{V}_h = \left\{y_h \in C^0([0,1]) \text{ et } y_h\mid_{[x_i,x_{i+1}]} \in P_1, \forall i = \overline{0,n}\right\}.$$

. . . . *(1+1 pts)*

Une base de l'espace discret $\mathcal{V}_h^1$ *est formée des fonctions* ϕ_i*, pour* $i \in \{0, \cdots, n+1\}$ *définies par :*

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{h} & x \in [x_{i-1}, x_i], \\ \frac{x_{i+1} - x}{h} & x \in [x_i, x_{i+1}], \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}$$

La solution discrète y_h *est de la forme :* $y_h = \sum_{i=0}^{n+1} y_i \phi_i(x)$*, où les coefficients* y_i *sont solutions du système linéaire suivant :* $AY = b$*, avec les notations :*

$$\begin{aligned} Y &= (y_0, \cdots, y_{n+1})^T, \\ A &= (a_{ij})_{0 \le i,j \le n+1}, a_{ij} = a(\phi_i, \phi_j) = \int_0^1 (\phi_i' \phi_j' + \gamma \phi_i \phi_j)(x)\, dx, \\ b &= (b_i)_{0 \le i \le n+1}, b_i = \int_0^1 f(x) \phi_i(x)\, dx \end{aligned}$$

La matrice A *est symétrique, définie positive. Le système* $AY = b$ *admet donc une solution unique.*

. . . . . (1+1 pts)

3. *D'après le lemme de Céa*

$$\|y - y_h\|_{H^1(0,1)} \le C \|y - v_h\|_{H^1(0,1)}, \forall v_h \in \mathcal{V}_h.$$

En choisissant $v_h = \Pi_h y \in \mathcal{V}_h$*, nous obtenons*

$$\|y - y_h\|_{H^1(0,1)} \le C \|y - \Pi_h y\|_{H^1(0,1)} \longrightarrow 0 \quad \textit{quand } h \longrightarrow 0.$$

De plus, vu que $f \in L^2(0,1)$*, on a* $y \in H^2(0,1)$ *et*

$$\|y - y_h\|_{H^1(0,1)} \le C \|y - \Pi_h y\|_{H^1(0,1)} \le Ch \|y''\|_{L^2(0,1)},$$

. . . . . (1 pt)

où C *est une constante positive indépendante de* h $\left(C = \sqrt{\frac{\|f\|_{L^2}}{\min(1,\gamma)}} \right)$.

Donc, la méthode est converge d'ordre 1.

. . . . . (1 pt)

I. Rezzoug