

التمرين الأول (5 نقاط): أجب ب صحيح أو خطأ مع التعليل.

(1) (0.75+0.5) كل متتالية محدودة هي متتالية متقاربة.

(2) (0.75+0.5) إذا كانت $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية متناقصة على \mathbb{N} و متقاربة نحو العدد ℓ من \mathbb{R} فإن $\inf_{n \in \mathbb{N}} u_n = \ell$.

(3) (0.75+0.5) إذا كان $\left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell > 0 \right)$ فإن:

$$(\exists \delta > 0; \forall x \in]a - \delta, a[\cup]a, a + \delta[: f(x) > 0)$$

(4) (0.75+0.5) إذا كان التابع f مستمر عند 0 فإن التابع $g: x \rightarrow xf(x)$ يقبل الاشتقاق عند 0.

التمرين الثاني (8 نقاط): (الهدف في هذا التمرين هو إثبات تباعد متتالية تراجعية، باستخدام متتاليتين جزئيتين).

(1) ليكن f التابع المعرف على المجال $I = [0; 1]$ كما يلي: $f(x) = 1 - x^2$.

نعرف المتتالية التراجعية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ حيث $u_0 = \frac{1}{2}$ و $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = f(u_n)$.

أ - (1 نقطة) أدرس اتجاه تغير التابع f على I ثم استنتج أن: $\forall x \in I : 0 \leq f(x) \leq 1$.

ب - (1.5 نقطة) بين أن $f \circ f(x) = -x^4 + 2x^2$ ، ثم حل في المجال I المعادلة: $x = f \circ f(x)$ ، إذا علمت أن 1 حل لها.

ج - (2 نقطة) أحسب u_1, u_2, u_3 ، ثم بين أن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ محدودة.

(2) لتكن المتتاليتين $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ، $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ حيث: $\forall n \in \mathbb{N} : v_n = u_{2n}$ و $\forall n \in \mathbb{N}^* : w_n = u_{2n-1}$.

أ - (1 نقطة) بين أن $\forall n \in \mathbb{N} : v_{n+1} = f \circ f(v_n)$ و $\forall n \in \mathbb{N}^* : w_{n+1} = f \circ f(w_n)$.

ب - (1 نقطة) بين أن المتتاليتين $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ، $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ رتبتين و متقاربتين.

ج - (1.5 نقطة) أحسب نهايتي $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ، ماذا تستنتج؟

التمرين الثالث (7 نقاط): ليكن التابع f المعرف بـ

$$f(x) = \begin{cases} xe^{\frac{x}{x^2+1}}, & x \geq 0 \\ \frac{3(x - \arctan x)}{x^2}, & x < 0 \end{cases}$$

(1) (0.5 نقطة) عين مجموعة تعريف التابع f .

(2) أ - (2 نقطة) باستعمال قاعدة لوبيتال أحسب النهاية $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^3}$.

ب - (1.5 نقطة) استنتج أن f يقبل الاشتقاق عند 0.

(3) أ - (2 نقطة) باستعمال قاعدة لوبيتال احسب النهاية: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(xe^{\frac{x}{x^2+1}} - x \right)$.

ب - (1 نقطة) استنتج أن المنحنى البياني (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل بجوار $+\infty$ يطلب تعيين معادله له.

<u>التمرين الأول (5 نقاط):</u>	
0.5	(1) خطأ
0.25	التعليل: لتكن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ حيث $u_n = (-1)^n$ ، $\forall n \in \mathbb{N} : u_n = (-1)^n$ لدينا $-1 \leq u_n \leq 1$ أي أن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ محدودة، لكنها متباعدة لأن المتتاليتين الجزئيتين $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ و $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ متقاربتين نحو نهايتين مختلفتين هما 1 و -1 على الترتيب.
0.5	(2) صحيح
0.5	التعليل: بما أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ فإن $\forall \varepsilon > 0; \exists N \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N}; n > N \Rightarrow \ell - \varepsilon < u_n < \ell + \varepsilon$ لنبرهن بالخلف أن $\forall n \in \mathbb{N}; u_n \geq \ell$ نفرض أن $\exists n_0 \in \mathbb{N}; u_{n_0} < \ell$ و منه $\ell - u_{n_0} > 0$ ، بوضع $\varepsilon = \ell - u_{n_0}$ في (1) نحصل على $\exists n_1 \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N}; n > n_1 \Rightarrow u_n < u_{n_0}$ و بما أن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متناقصة فإن $n > n_0 \Rightarrow u_n \leq u_{n_0}$ من أجل $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$ فإن $u_{n_0} < u_n$ و $u_{n_0} \geq u_n$ $\forall n \in \mathbb{N}; n > n_2$ وهذا تناقض. بوضع $n = N_1 = N + 1$ في (1) نحصل على $\forall \varepsilon > 0; \exists N_1 \in \mathbb{N}; u_{N_1} < \ell + \varepsilon$.
0.5	(3) صحيح
0.5	نفرض $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell > 0$ أي أن: $\forall \varepsilon > 0; \exists \delta > 0 : 0 < x - a < \delta \Rightarrow f(x) - \ell < \varepsilon$ $\exists \delta > 0 : 0 < x - a < \delta \Rightarrow f(x) - \ell < \ell$ $\Rightarrow 0 < f(x) < 2\ell$
0.5	إذن $\exists \delta > 0; \forall x \in]a - \delta, a[\cup]a, a + \delta[: f(x) > 0$
0.25	(4) صحيح
0.5	إذا كان التابع f مستمر عند 0 فإن $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ و منه فإن:
0.25	
0.5	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$

التمرين الثاني (8 نقاط):

0.5 (1) $f'(x) = -2x < 0 \forall x \in [0; 1]$ ، f متناقص تماما على المجال $[0; 1]$.

0.5 لدينا : $x \in [0; 1] \Rightarrow 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow f(1) \leq f(x) \leq f(0) \Rightarrow 0 \leq f(x) \leq 1$

0.5 ب) $\forall x \in [0; 1]: f \circ f(x) = 1 - (1 - x^2)^2 = -x^4 + 2x^2$

$$x = f \circ f(x) \Leftrightarrow x = -x^4 + 2x^2 \Leftrightarrow x(x^3 - 2x + 1)$$

$$\Leftrightarrow x(x - 1)(x^2 + x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ أو } x = 1 \text{ أو } x = \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2} \text{ أو } x = \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}$$

1

و منه $S = \left\{0, 1, \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}\right\}$. $\left(\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2} \notin I\right)$

3(0.5)

$$\rightarrow u_1 = \frac{3}{4} , u_2 = \frac{7}{16} = 0.4375 , u_3 = \frac{207}{256} = 0.80859$$

نستعمل البرهان بالتراجع: $0 \leq u_0 = \frac{1}{2} \leq 1$

0.5

نفرض $0 \leq u_n \leq 1$ و منه $f(1) \leq f(u_n) \leq f(0)$ أي أن $0 \leq u_{n+1} \leq 1$.

0.5

(1) $\forall n \in \mathbb{N} : v_{n+1} = u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = f(f(u_{2n})) = f \circ f(v_n)$

0.5

$\forall n \in \mathbb{N} : w_{n+1} = w_{2n+1} = f(w_{2n}) = f(f(w_{2n-1})) = f \circ f(w_n)$

0.5

ب) بما أن f متناقص فإن $f \circ f$ متزايد إذن المتتاليتين $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ رتيبتين تماما.

0.5

بما أن المتتاليتين $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ رتيبتين و محدودتين فهما متقاربتين.

0.5

ج) إن نهايتي $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ هما حلي المعادلة $x = f \circ f(x)$ و منه

0.5

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0 \Leftrightarrow (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ متناقصة تماما} \Leftrightarrow \left(v_1 = u_2 = \frac{7}{16} < v_0 = u_0 = \frac{1}{2}\right)$$

0.5

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 1 \Leftrightarrow (w_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ متزايدة تماما} \Leftrightarrow \left(w_2 = u_3 = \frac{207}{256} > w_1 = u_1 = \frac{3}{4}\right)$$

0.5

بما أن المتتاليتين الجزئيتين $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ و $(u_{2n-1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ متقاربتين نحو نهايتين مختلفتين هما 0 و 1 على الترتيب فإن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متباعدة.

التمرين الثالث (7 نقاط):

0.5

$$D_f = \mathbb{R} \quad (1)$$

2

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{x^2+1}}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3(x^2+1)} = \frac{1}{3} \quad (2)$$

0.5

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{xe^{x^2+1} - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{x^2+1} = 1 \quad (ب)$$

0.5	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3(x - \arctan x) - 0}{x^2}}{x - 0} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^3} = 3 \frac{1}{3} = 1$
0.5	<p>إذن $f'(0 - 0) = f'(0 + 0) = 1$ و منه f يقبل الاشتقاق عند 0.</p>
2	<p>(أ) ح ع ت $\lim_{x \rightarrow +\infty} (xe^{\frac{x}{x^2+1}} - x) = +\infty - \infty$</p> $\lim_{x \rightarrow +\infty} (xe^{\frac{x}{x^2+1}} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{x}{x^2+1}} - 1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-e^{\frac{x}{x^2+1}} \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2}}{-\frac{1}{x^2}}$ $= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{x}{x^2+1}} \frac{x^4 - x^2}{(x^2 + 1)^2} = 1$
0.75	<p>(ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (xe^{\frac{x}{x^2+1}} - x) = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 1$</p> $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x + 1)) = 0$
0.25	<p>و منه فإن المستقيم ذو المعادلة $y = x + 1$ مقارب للمنحنى البياني (C_f) بجوار $+\infty$.</p>