Corrigé :

Exo 1 : (6 pts)

1) $\ker T = \{x \in H \,/\, Tx = 0_H\} = T^{-1}(\{0_H\})$

T étant continue et $\{0_H\}$ est ~~fermé~~ 1 dans H alors $\ker T$ est fermé dans H car c'est l'image réciproque d'un fermé par une application continue. 1

2) $(\operatorname{Im} T)^{\perp} \overset{?}{=} \ker(T)$

* $\operatorname{Im} T \overset{?}{\subseteq} \ker(T)$

soit $x \in (\operatorname{Im} T)^{\perp}$ donc pour tout $z \in H$ 1

on a : $\langle x, Tz \rangle = 0$.

or : $\langle x, Tz \rangle = \langle Tx, z \rangle$

alors : $\langle Tx, z \rangle = 0, \ \forall z \in H$.

c.à.d : $Tx \in H^{\perp} = \{0\}$

et donc $Tx = 0$ et $x \in \ker(T)$

* $\ker(T) \overset{?}{\subseteq} (\operatorname{Im} T)^{\perp}$

soit $x \in \ker(T)$, alors pour tout $y \in \operatorname{Im} T$

on a : $y = Tz$ avec $z \in H$

alors : $\langle x, y \rangle = \langle x, Tz \rangle = \langle Tx, z \rangle$
$= \langle 0, z \rangle = 0$ 1

donc $x \in (\operatorname{Im} T)^{\perp}$

3) $H \overset{?}{=} \ker T \oplus \overline{\operatorname{Im} T}$

Comme $\ker(T)$ est un sous-espace fermé

on a : $H = \ker(T) \oplus \ker(T)^{\perp}$ 1

or : $\ker(T)^{\perp} = (\operatorname{Im} T)^{\perp\perp} = \overline{\operatorname{Im}(T)}$

Alors : ~~Ke~~

$H = \ker(T) \oplus \overline{\operatorname{Im}(T)}$ 1

Exo 2 : (6 pts)

On rappelle que $(\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach, en plus on a : 1

$E \subset \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$.

Pour montrer que (E, N) est un espace de Banach il suffit de montrer qu'il est complet.

Soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy dans (E, N) alors :

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall p, q \in \mathbb{N} : p > q \geq n_0 \Rightarrow N(f_p - f_q) < \varepsilon$

" " " 1 $\Rightarrow \|f_p - f_q\|_\infty + \sup\limits_{0 \leq x < y \leq 1} \dfrac{|(f_p - f_q)(x) - (f_p - f_q)(y)|}{|x - y|} < \varepsilon$

donc :

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall p, q \in \mathbb{N}, p > q \geq n_0 \Rightarrow \|f_p - f_q\| < \varepsilon$

Autrement dit $(f_n)_n$ est de Cauchy dans l'espace $(\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ qui est de Banach, elle converge donc vers une fonction $f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$. 1

* f est-il Lipschitzienne ?

$(f_n)_n$ est de Cauchy donc elle est bornée

c.à.d : $\exists C > 0 \,/\, \forall x, y : 0 \leq x < y \leq 1$, $\dfrac{|f_n(x) - f_n(y)|}{|x - y|} \leq C$

Par passage à la limite on trouve : 1

$\dfrac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leq C$ et donc f est Lipschitzienne

* $(f_n)_n$ converge-t-elle vers f pour la norme N ?

soit $\varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall p, q \in \mathbb{N}, p > q \geq n_0 \Rightarrow$

1 $\Rightarrow \|f_p - f_q\|_\infty + \dfrac{|(f_p - f_q)(x) - (f_p - f_q)(y)|}{|x - y|} < \varepsilon \quad \forall x, y$

On fait tendre p vers $+\infty$, il vient :

$\|f_p - f_q\| + \dfrac{|(f - f_q)(x) - (f - f_q)(y)|}{|x - y|} < \varepsilon$.

Ceci étant vrai pour tout $0 \leq x < y \leq 1$

on a donc $N(f_q - f) < \varepsilon$. 1

Ce qui achève la preuve du fait que (E, N) est complet

Exo 3 (8 pts) :

1) $G = \{f \in H \, , \langle \mathcal{X} , f \rangle = 0\}$.

avec : $\mathcal{X} : [-1, +1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \mathcal{X}(x) = |x|$.

donc $G = \{f \in H \,/\, \int_{-1}^{+1} \mathcal{X}(x) f(x)\, dx = 0\}$

$= \{f \in H / \varphi(f) = 0\}$

$= \ker(\varphi) = \varphi^{-1}(\{0\})$. 1

* G est donc fermé car c'est l'image réciproque d'un fermé par une app continue φ.

* G est fermé dans un espace de Hilbert (H est donc complet). Alors G est complet. 1

2) H est un espace de Hilbert

G est sous-espace fermé de H

d'après le théorème de la projection

h : $h(x) = x + 1$. 1 $\forall x \in [-1, +1]$

admet une unique projection $f \in G$

$f = P_G(h)$ et $h - f \in G^{\perp}$.

On remarque que : $h = I + \mathbb{1}$ tel que

$I : [-1, +1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto I(x) = x$.

$\mathbb{1} : [-1, +1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \mathbb{1}(x) = 1$.

$I \in G$ car : $\langle \mathcal{X} , I \rangle = \int_{-1}^{+1} |x| x \, dx = 0$

$\mathbb{1} \notin G$ car $\langle \mathcal{X} , \mathbb{1} \rangle = \int_{-1}^{+1} |x| \, dx \neq 0$ 1

et comme $h = I + \mathbb{1} \in H = G \oplus G^{\perp}$

Alors $\mathbb{1} \in G^{\perp}$ (car $I \in G$)

d'où $\langle \mathbb{1} , g \rangle = 0 \quad \forall g \in G$. 1

c.à.d : $\langle h - I , g \rangle = 0 , \forall g \in G$ (*)

mais on a : $h - f \in G^{\perp}$ alors :

$\langle h - f , g \rangle = 0 \quad \forall g \in G$ (**)

de (*) et (**) et par l'unicité de f on obtient que $f \equiv I$. 1

3) $dist(h, G) = \inf_{g \in G} \| h - g \| = \| h - f \|$ 1

$= \| h - I \|$

$\| h - I \| = \| \mathbb{1} \| = \left(\int_{-1}^{+1} dx \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

d'où $dist(h, G) = \sqrt{2}$ 1