UNIVERSITE LARBI BEN M'HIDI – OUM EL BOUAGHI
Département M.I 2022-2023
3ème Année Licence Maths(S5)
Matière: Espaces vectoriels normés Durée 1h30

Contrôle Semestriel

Exercice1 (6 pts):

Soit $(H,\langle .,.\rangle)$ *un espace de Hilbert et* $T : H \to H$ *une application linéaire continue vérifiant :* $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle \quad \forall x, y \in H$.

1. Dire pourquoi $KerT$ *est fermé dans* H.
2. Montrer que $(ImT)^{\perp} = KerT$.
3. En déduire que $H = KerT \oplus \overline{ImT}$.

Exercice2 (6 pts):

Soit E l'ensemble des fonctions définies de $[0;1]$ *dans* $\mathbb{R}$ *qui sont lipschitziennes. On munit E par la norme suivante :* $N(f) = \|f\|_{\infty} + \sup_{0\le x<y\le 1} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}$.
Démontrer que (E, N) est un espace de Banach.

Exercice3 (8 pts):

Muni du produit scalaire donné par $< f, g >= \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$ *, l'espace :*

$$H = L^2([-1,1],\mathbb{R}) = \left\{f : [-1,1] \to \mathbb{R} ;\ \int_{-1}^{1} f^2(x)dx < +\infty\right\}$$ *est un espace de Hilbert.*

On désigne par v *la fonction valeur absolue et par* φ *la forme linéaire continue définie pour* $f \in H$ *par :* $\varphi(f) = \int_{-1}^{1} |x| f(x)dx = 0$.
On considère le sous-espace vectoriel G de H défini par : $G = \{f \in H ; < v, f >= 0\}$.
1. Montrer que G est fermé. En déduire qu'il est complet.
2. Déterminer la projection de la fonction $h : x \mapsto x + 1$ *sur* G.
3. Déduire la distance de h à G

Bon courage