UNIVERSITÉ LARBI BEN M'HIDI-OUM EL BOUAGHI

Département de Mathématique et Informatique

$3^{ième}$ Licence SI **Corrigé type Prob & Stat** **Le 16/01/2023**

Exercice 01 (05 points) :

Q1) Faux. Soit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, alors $E(X) = \lambda$ et $var(X) = \lambda$. (1 pt)

Q2) Vrai. (0.5 pt)

Q3) Faux. Soit $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, on estime X vers la loi $\mathcal{P}(\lambda)$ si $n \to \infty$ et $p \to 0$, avec $\lambda = n\,p$. (1 pt)

Q4) (2.5 pts)

1. Vrai. $\widehat{\mu} = \dfrac{\sum x_i}{10} = 36$.
2. Faux. $IC_{1-\alpha}(\mu) = [29.8, 42.2]$.

Exercice 02 (06 points) : (Variable aléatoire discrète)

I) On tire **avec remise** trois boules d'urne qui contient 6 B.N et 4 B.B.

1. On a $card(\Omega) = 10^3$. Soit A l'évènement "exactement deux boules tirées soient blanches", alors : $P(A) = \dfrac{card(A)}{card(\Omega)} = \dfrac{3\ \times\ 4^2\ \times\ 6}{10^3} = 0.29$. (1 pt)
2. Soit X la v.a "le nombre de boules blanches tirées". Donc
   - Le support de X : $\mathcal{S}(X) = \{0, ..., 3\}$. (0.5 pt)
   - La loi de probabilité : $X \sim \mathcal{B}(n = 3, p = \dfrac{2}{5})$. (0.5 pt)
   - La formule de la loi de probabilité :

     $$P(X = k) = C_n^k\, p^k\, (1-p)^{n-k} = C_3^k \left(\frac{2}{5}\right)^k \left(\frac{3}{5}\right)^{3-k} \quad pour \quad k \in \mathcal{S}(X)$$

     (1 pt)
   - $P(X = 2) = 0.29$ (0.5 pt)
   - $E(X) = n\,p = ...$ et $var(X) = n\,p\,(1-p) = ...$ (1 pt)

II) Soit Y la v.a "le nombre de boules blanches tirées". Donc

- Le support de Y : $\mathcal{S}(Y) = \{0, ..., 3\}$.
- La loi de probabilité : $Y \sim \mathcal{H}(n = 3, N_1 = 4, N = 10)$. (0.5 pt)
- La formule de la loi de probabilité : $P(Y = k) = \dfrac{C_{N_1}^k\ C_{N-N_1}^{n-k}}{C_N^n}$. (1 pt)

Exercice 03 (05 points) : (Probabilité conditionnelle)

On a $P(A) = 0.75$, $P(B) = 0.15$ et $P(C) = 0.1$. Soit D l'évènement "l'unité soit défectueuse". Donc $P(D \mid A) = 0.03$, $P(D \mid B) = 0.05$ et $P(D \mid C) = 0.06$. (1.25 pts)

L'expérience aléatoire est " choisir au hasard une unité de la production de cette usine".

1. L'ensemble $\{A, B, C\}$ forme un système complet d'évènement (0.25 pt), donc d'après la formule de probabilité totale (0.25 pt), on obtient :

$$\begin{aligned} P(D) &= P(D \cap A) + P(D \cap B) + P(D \cap C) \\ &= P(D \mid A)\ P(A) + P(D \mid B)\ P(B) + P(D \mid C)\ P(C) \quad (\mathbf{0.5pt}) \\ &= 0.03\ \times\ 0.75 + 0.05\ \times\ 0.15 + 0.06\ \times\ 0.1 = 0.036 \quad (\mathbf{0.5pt}) \end{aligned}$$

2. On applique la formule de Bayes (0.25 pt), on trouve :

$$P(C \mid D) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)} = \frac{P(D \mid C)\ P(C)}{P(D)} \quad (\mathbf{0.5pt})$$
$$= \frac{0.06\ \times\ 0.1}{0.036} = 0.17 \quad (\mathbf{05pt})$$

Et

$$P(B \mid D) = \frac{P(B \cap D)}{P(D)} = \frac{P(D \mid B)\ P(B)}{P(D)} \quad (\mathbf{0.5pt})$$
$$= \frac{0.05\ \times\ 0.15}{0.036} = 0.21 \quad (\mathbf{05pt})$$

Exercice 04 (04 points) : (Variable aléatoire continue)

Soit la v.a réelle X de densité de probabilité f donnée par :

$$f(x) = 6x(1-x) \qquad si \quad 0 \leq x \leq 1$$

1. La fonction f est une densité de probabilité si $f \geq 0$ et $\int f(x)\ dx = 1$ (1 pt).

$$\int f(x)\ dx = \int_0^1\ 6x(1-x)\ dx = 6\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\Big) = 1$$

2. La fonction de répartition F_X : (1 pt)

$$Si\ \ x < 0\ \ F_X(x) = 0$$
$$Si\ \ 0 \leq x < 1\ \ F_X(x) = \int_0^x\ 6t(1-t)\ dt = 6\Big(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\Big)$$
$$Si\ \ x \geq 1\ \ F_X(x) = 1$$

3. $P(-1 < X < 2.5) = 1$
   $P(0.25 < X < 0.75) = F_X(0.75) - F_X(0.25) =$ ..... (0.5 pt).
   $E(X) = \int_0^1\ x \times f(x)\ dx = 6 \int_0^1\ (x^2 - x^3)\ dx = 6(1/3 - 1/4) = 6/12 = 0.5$ (1 pt).