Chapitre 2
Intégration Numérique

Les méthodes d'intégration numérique, interviennent essentiellement lorsque une primitive de f est d'expression assez compliquée ou inconnue, ou lorsque f n'est connue que par points, par exemple si elle résulte de mesures physiques, on peut l'approcher alors par interpolation, puis on intègre numériquement l'interpolée. On traitera seulement les intégrales du type :

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

ou $[a, b]$ est un intervalle fini de $\mathbb{R}$ et f est continue sur $[a, b]$.

1- Méthode des rectangles :

On considère une subdivision de l'intervalle $[a, b]$, en sous intervalles égaux $[x_i \ , \ \ x_{i+1}]$ ou $x_i = a + ih$,

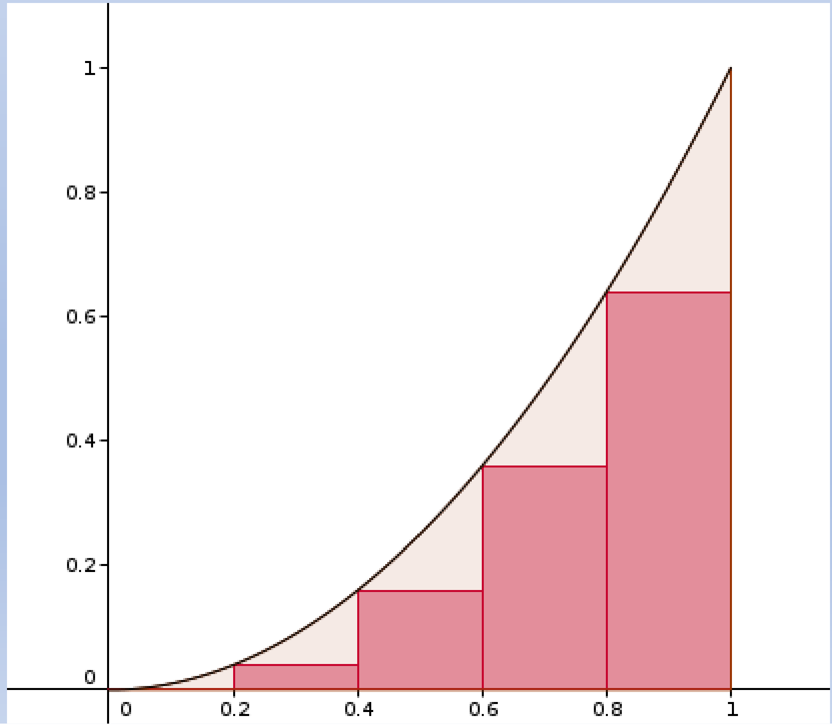
$(i = 0,1,2 \dots \dots \dots . n)$, $a = x_{0,}$ $b = x_n$ $et \ h = \frac{b-a}{n}$.

On suppose les valeurs $f(x_i)$ connues pour :

$i = 0, 1, \ 2, \ \ \dots \dots \dots . . n$.

Méthode des rectangles à gauche :

Dans cette méthode on remplace la fonction $f(x)$ dans chaque intervalle $[x_i \ , \ \ x_{i+1}]$ par $f(x_i)$ on a alors $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \approx \ h\, f(x_i)$



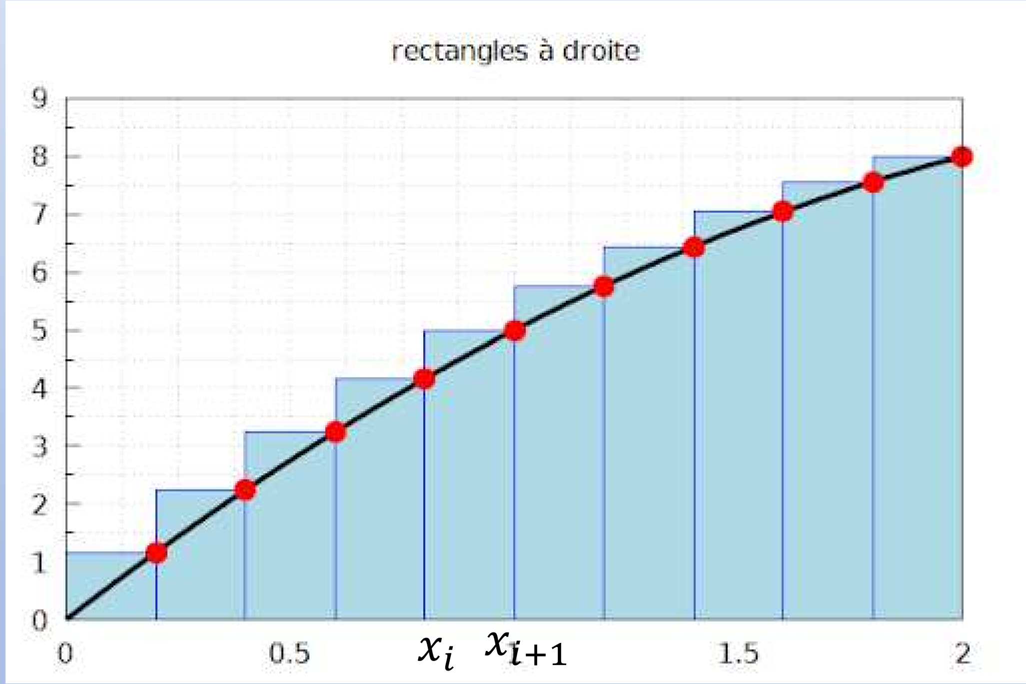
Ce qui donne :

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) = h\sum_{i=0}^{n-1} f(a+ih)$$

Méthode des rectangles à droite :

Dans cette méthode on remplace la fonction $f(x)$ dans chaque intervalle $[x_i \ , \ x_{i+1}]$ par $f(x_{i+1})$ on obtient alors

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \approx h\, f(x_{i+1})$$

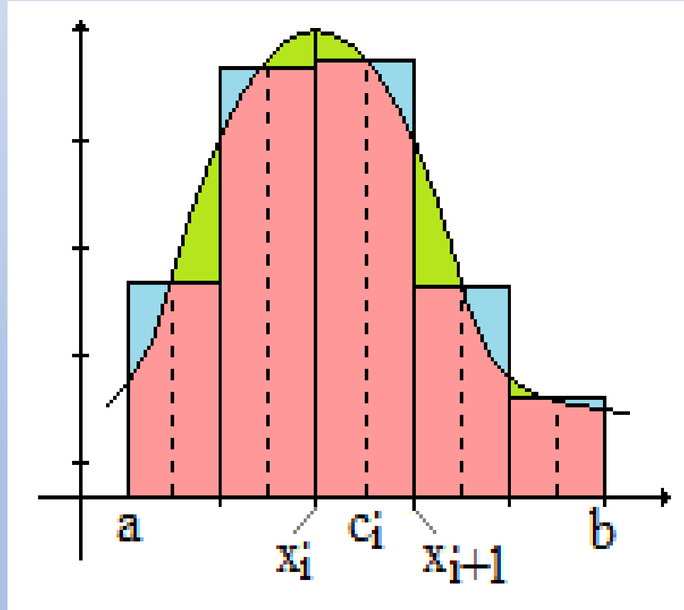


Ce qui donne :

$\int_a^b f(x)dx \approx h \sum_{i=1}^{n} f(x_i) = h\sum_{i=1}^{n} f(a+ih)$

Méthode des rectangles points milieux :

Cette fois-ci on prend pour chaque sous-intervalle $[x_i \ , \ x_{i+1}]$, $(\frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2})$ comme hauteur du rectangle, on a alors :



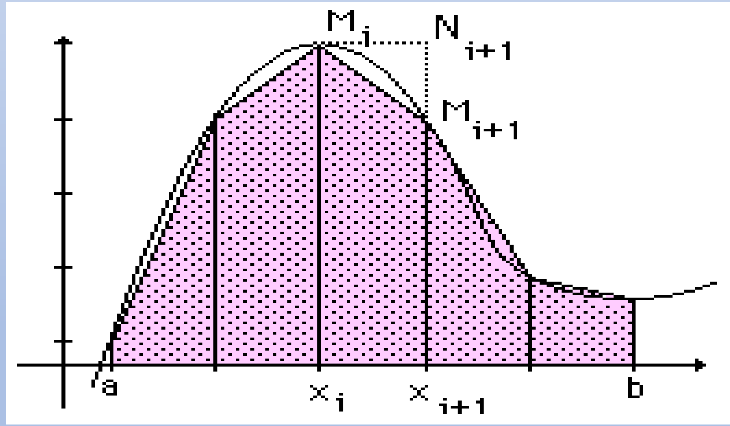
$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \approx h(\frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2})$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}$$

$$\approx \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (f(a+ih) + f(a+(i+1)h)$$

2- Méthode des trapèzes :

Sur chaque intervalle $[x_i \ , \ x_{i+1}]$, on remplace $f(x)$ par le segment de la droite passant par les points $(x_i, f(x_i))$ *et* $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$ dont l'équation est :



$$y = f(x_i) + (x - x_i) \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

L'aire exacte $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$ est remplacée par l'aire T_i du trapèze. $T_i = \frac{h}{2}(f(x_i) + f(x_{i+1}))$.

Par conséquent en sommant les aires des n trapèzes de bases $[x_i \; , \; x_{i+1}]$ on obtient une approximation T_h de l'intégrale :

$I = \int_a^b f(x)dx \approx T_h$

$$T_h = \frac{h}{2}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right]$$

$$T_h = \frac{h}{2}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(a + ih)\right]$$

Erreur de la méthode :

On démontre que l'erreur $E_h = I - T_h$ commise par application de la méthode des Trapèzes est donnée par :

$$E_h = -\frac{(b-a)\ h^2}{12}\ f''(\xi)\,, \qquad \xi \in [a,b]$$

Donc si $M_2 = \ max_{[a,b]}\,|f''(t)|$,

Alors $|E_h| \leq \frac{(b-a)^3}{12\ n^2}\ M_2$

Programme de la méthode :

Voir le fichier program_trapezes qui nous permet de calculer :

$$\int_a^b x^2\ e^{-x^2}\ dx$$

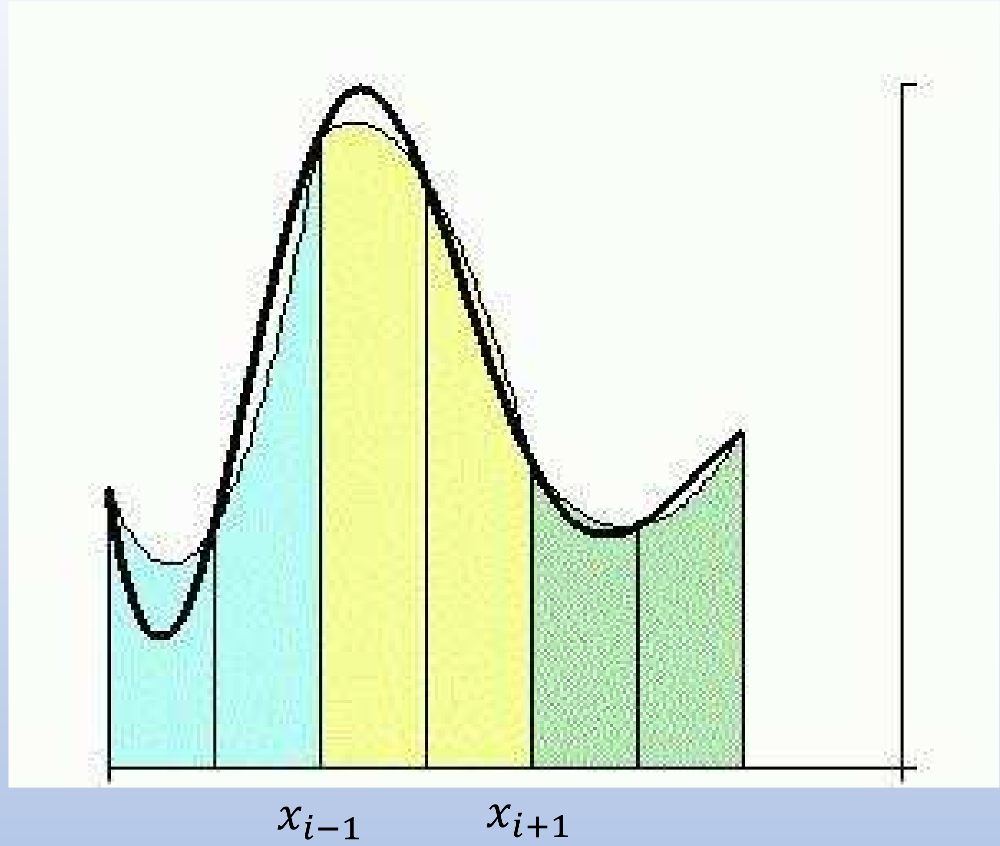
a et b données.

2- Méthode de Simpson :

Dans cette méthode sur chaque intervalle $[x_{i-1}\ , x_{i+1}]$, on remplace $f(x)$ non pas par le segment de la droite passant par les points $(x_{i-1}\ , f(x_{i-1}))\ et\ \left(x_{i+1}, f(x_{i++1})\right)$ comme dans la méthodes des trapèzes , mais avec la parabole passant par les trois points $(x_{i-1}\ , f(x_{i-1}))$, $\left(x_i, f(x_i)\right)\ et\ \left(x_{i+1}, f(x_{i++1})\right)$ c.à.d. Le polynôme de degré 2 passant par ces trois points dont l'équation est :

$$p_2(x) = f(x_{i-1}) \frac{(x - x_i)(x - x_{i+1})}{(x_{i-1} - x_i)(x_{i-1} - x_{i+1})} + f(x_i) \frac{(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})}{(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})} + f(x_{i+1}) \frac{(x - x_{i-1})(x - x_i)}{(x_{i+1} - x_{i-1})(x_{i+1} - x_i)}$$

D’autre part la surface S_i délimitée par cette parabole, les droites $x = x_{i-1}$, $x = x_{i+1}$ et l’axe des abscisses s’obtient en calculant



$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} P_2(x)\, dx$$

d’où :

$$S_i = \frac{h}{3}\left[f(x_{i-1}) + 4\, f(x_i) + f(x_{i+1})\right]$$

Ceci donne l'approximation de Simpson S_h de I en sommant les aires S_i , pour $i = 1,3, \dots \dots .. (n-1)$ (n doit être paire)

$$S_h = S_1 + S_3 + \dots + S_{(n-1)}$$
$$= \frac{h}{3}\left[(f\left(x_0\right) + 4\, f(x_1) + f(x_2))\right] +$$
$$\frac{h}{3}\left[(f(x_2 + 4\, f(x_3\,) + f(x_4)\,)\,\right] + \dots +$$
$$\frac{h}{3}\left[(f(x_{n-2} + 4\, f(x_{n-1}\,) + f(x_n)\,)\right]$$

En posant $n = 2m$ on peut écrire :

$$S_h = \frac{h}{3}\left[f(a) + f(b) + 4\sum_{i=1}^{m-1} f(a + (2i+1)h)) \quad + 2\sum_{1}^{m-1} f(a + 2ih)\right]$$

Erreur de la méthode :

On démontre que l'erreur $E_h = I - S_h$ commise par application de la méthode de Simpson est donnée par :

$$E_h = -\frac{(b\ -a\ )\ h^4}{180}\ f^{(4)}(\xi)\ , \qquad \xi \in\ [a,b]$$

Donc si $M_4 = \ max_{[a,b]} \left|f^{(4)}(t)\right|$,

Alors $|E_h| \leq \frac{(b\ -a)^5}{180\ n^4}\ M_4$

Programme de la méthode :

Voir le fichier program_simpson qui nous permet de calculer :

$$\int_a^b \sqrt{1+\ x^2\ dx}$$

a et b données.