Solution de série N=02.

Exercice 01:

1. La solution exacte du système (1) est $X=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$
on peut trouver le résultat par la méthode de Gauss ou LU ou Cramer (voir exercice 01 de la série N=01).

2. (a) Algorithme de Jacobi appliqué au système (1):

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3} \\ x_2 = \frac{3}{10}x_1 + \frac{4}{10}x_3 - \frac{4}{10} \\ x_3 = -\frac{1}{6}x_1 + \frac{2}{9}x_2 + 1 \end{cases}$$

Jacobi:
$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{3}x_2^{(k)} + \frac{1}{3}x_3^{(k)} - \frac{1}{3} \\ x_2^{(k+1)} = \frac{3}{10}x_1^{(k)} + \frac{2}{5}x_3^{(k)} - \frac{2}{5} \\ x_3^{(k+1)} = -\frac{1}{6}x_1^{(k)} + \frac{2}{9}x_2^{(k)} + 1. \end{cases}$$

(b) Gauss Seidel:
$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{3}x_2^{(k)} + \frac{1}{3}x_3^{(k)} - \frac{1}{3} \\ x_2^{(k+1)} = \frac{3}{10}x_1^{(k+1)} + \frac{2}{5}x_3^{(k)} - \frac{2}{5} \\ x_3^{(k+1)} = -\frac{1}{6}x_1^{(k+1)} + \frac{2}{9}x_2^{(k+1)} + 1 \end{cases}$$

3. Calcul de 2 itérations de Jacobi à partir de $X^{(0)} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1^{(0)}\\x_2^{(0)}\\x_3^{(0)}\end{pmatrix}$

1ère itération: $k=0$
$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \frac{1}{3}x_2^{(0)} + \frac{1}{3}x_3^{(0)} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\times 0 + \frac{1}{3}\times 0 - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3} \\ x_2^{(1)} = \frac{3}{10}x_1^{(0)} + \frac{2}{5}x_3^{(0)} - \frac{2}{5} = \frac{3}{10}\times 0 + \frac{2}{5}\times 0 - \frac{2}{5} = -\frac{2}{5} \\ x_3^{(1)} = -\frac{1}{6}x_1^{(0)} + \frac{2}{9}x_2^{(0)} + 1 = -\frac{1}{6}\times 0 + \frac{2}{9}\times 0 + 1 = 1 \end{cases}$$

donc $X^{(1)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{5} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{pmatrix}$

2ème itération: on remplace $k=1$ dans l'algorithme de Jacobi

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = \frac{1}{3}x_2^{(1)} + \frac{1}{3}x_3^{(1)} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\times\left(-\frac{2}{5}\right) + \frac{1}{3}\times(1) - \frac{1}{3} = -\frac{2}{15} \\ x_2^{(2)} = \frac{3}{10}x_1^{(1)} + \frac{2}{5}x_3^{(1)} - \frac{2}{5} = \frac{3}{10}\times\left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{2}{5}\times(1) - \frac{2}{5} = -\frac{1}{10} \\ x_3^{(2)} = -\frac{1}{6}x_1^{(1)} + \frac{2}{9}x_2^{(2)} + 1 = -\frac{1}{6}\times\left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{2}{9}\times\left(-\frac{2}{5}\right) + 1 = \frac{87}{90} = \frac{29}{30} \end{cases}$$

donc $X^{(2)} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{15} \\ -\frac{1}{10} \\ \frac{29}{30} \end{pmatrix}$

(b) Calcul de 2 itérations par la méthode de Gauss-Seidel

1ère itération: $k=0$ dans l'algorithme de G.S on trouve,

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \frac{1}{3}x_2^{(0)} + \frac{1}{3}x_3^{(0)} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\times 0 + \frac{1}{3}\times 0 - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}. \\ x_2^{(1)} = \frac{3}{10}x_1^{(1)} + \frac{2}{5}x_3^{(0)} - \frac{2}{5} = \frac{3}{10}\times\left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{2}{5}\times 0 - \frac{2}{5} = \frac{-5}{10} = -\frac{1}{2}. \\ x_3^{(1)} = -\frac{1}{6}x_1^{(1)} + \frac{2}{9}x_2^{(1)} + 1 = -\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{2}{9}\times\left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = \frac{17}{18} \end{cases}$$

donc $X^{(1)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{17}{18} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{pmatrix}$

2ème itération; on remplace par $k=1$ dans l'algorithme de Gauss Seidel on trouve;

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = \frac{1}{3} x_2^{(1)} + \frac{1}{3} x_3^{(1)} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\left(\frac{-1}{2}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{17}{18}\right) - \frac{1}{3} = \frac{-10}{54} = \frac{-5}{27} \\ x_2^{(2)} = \frac{3}{10} x_1^{(2)} + \frac{2}{5} x_3^{(1)} - \frac{2}{5} = \frac{3}{10}\left(\frac{-5}{27}\right) + \frac{2}{5}\left(\frac{17}{18}\right) - \frac{2}{5} = \frac{-7}{90}. \\ x_3^{(2)} = -\frac{1}{6} x_1^{(2)} + \frac{2}{9} x_2^{(2)} + 1 = -\frac{1}{6}\left(\frac{-5}{27}\right) + \frac{2}{9}\left(\frac{-7}{90}\right) + 1 = \frac{821}{810}. \end{cases}$$

donc $X^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{-5}{27} \\ \frac{-7}{90} \\ \frac{821}{810} \end{pmatrix}$

4. l'erreur associé à la méthode de Jacobi après les 2 itérations

est $\| X_J^{(2)} - X \|_2 = \left\| \begin{pmatrix} \frac{-2}{15} \\ \frac{-1}{10} \\ \frac{29}{30} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} \frac{-2}{15} \\ \frac{-1}{10} \\ \frac{-1}{30} \end{pmatrix} \right\|_2$

$$= \sqrt{\left(\frac{-2}{15}\right)^2 + \left(\frac{-1}{10}\right)^2 + \left(\frac{-1}{30}\right)^2} = \sqrt{0{,}02888} = 0{,}1699$$

l'erreur associé à la méthode de Gauss-Seidel après les 2 itérations

est $\| X_{GS}^{(2)} - X \|_2 = \left\| \begin{pmatrix} \frac{-5}{27} \\ \frac{-7}{90} \\ \frac{821}{810} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} \frac{-5}{27} \\ \frac{-7}{90} \\ +\frac{11}{810} \end{pmatrix} \right\|_2 =$

$$= \sqrt{\left(\frac{-5}{27}\right)^2 + \left(\frac{-7}{90}\right)^2 + \left(\frac{11}{810}\right)^2} = \sqrt{0{,}04052} = 0{,}2013$$

Exercice 02 :

1. la solution exacte du système (2) est $X = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{3}{2} \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix}$

voir l'exercice 02 de la serie N=01.

2. (a) Algorithme de Jacobi appliqué au système ② :

$$② \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 = 2 \\ -x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

Tirons x_1 de la 1ère équation, x_2 de la 2ème équation et x_3 de la 3ème

on obtient $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} x_2 + \frac{1}{2} \\ x_2 = \frac{1}{3} x_1 + \frac{1}{3} x_3 + \frac{2}{3} \\ x_3 = \frac{1}{2} x_2 + \frac{1}{2}. \end{cases}$

à partir d'un vecteur initiale $X^{(0)}$ donné, on construit la suite

$$(*) \begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{2} x_2^{(k)} + \frac{1}{2} \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{3} x_1^{(k)} + \frac{1}{3} x_3^{(k)} + \frac{2}{3} \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{2} x_2^{(k)} + \frac{1}{2} \end{cases}$$

(b) Algorithme de Gauss-Seidel appliqué au système ② :

$$(**) \begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{2} x_2^{(k)} + \frac{1}{2} \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{3} x_1^{(k+1)} + \frac{1}{3} x_3^{(k)} + \frac{2}{3} \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{2} x_2^{(k+1)} + \frac{1}{2} \end{cases}$$

3. Calcul de 2 itérations de Jacobi à partir de $X^{(0)} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1^{(0)}\\x_2^{(0)}\\x_3^{(0)}\end{pmatrix}$

1ère itération: on remplace $k=0$ dans l'algorithme de Jacobi (*)

on trouve:
$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \frac{1}{2}x_2^{(0)} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\times 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ x_2^{(1)} = \frac{1}{3}x_1^{(0)} + \frac{1}{3}x_3^{(0)} + \frac{2}{3} = \frac{1}{3}\times 0 + \frac{1}{3}\times 0 + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}. \\ x_3^{(1)} = \frac{1}{2}x_2^{(0)} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\times 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

donc $X^{(1)} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{2}{3}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$

2ème itération: $k = 1$ dans l'algorithme de Jacobi (*) on trouve:
$$\begin{cases} x_1^{(2)} = \frac{1}{2}x_2^{(1)} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{1}{2} = \frac{5}{6} \\ x_2^{(1)} = \frac{1}{3}x_1^{(1)} + \frac{1}{3}x_3^{(1)} + \frac{2}{3} = \frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{2}{3} = 1 \\ x_3^{(1)} = \frac{1}{2}x_2^{(1)} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{1}{2} = \frac{5}{6} \end{cases}$$

donc $X^{(2)} = \begin{pmatrix}\frac{5}{6}\\ 1\\ \frac{5}{6}\end{pmatrix}.$

(b) Calcul de 2 itérations de Gauss-Seidel à partir de $X^{(0)} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1^{(0)}\\x_2^{(0)}\\x_3^{(0)}\end{pmatrix}$

1ère itération: on remplace par $k=0$ dans l'algorithme de G.S (**):
$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \frac{1}{2}x_2^{(0)} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\times 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \\ x_2^{(1)} = \frac{1}{3}x_1^{(1)} + \frac{1}{3}x_3^{(0)} + \frac{2}{3} = \frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3}\times(0) + \frac{2}{3} = \frac{5}{6} \\ x_3^{(1)} = \frac{1}{2}x_2^{(1)} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\times\left(\frac{5}{6}\right) + \frac{1}{2} = \frac{11}{12}. \end{cases}$$

donc $X^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{5}{6} \\ \frac{11}{12} \end{pmatrix}$

$2^{\text{ème}}$ itération : on remplace $k = 1$ dans l'algorithme de G.S $(\ast\ast)$:

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = \frac{1}{2} x_2^{(1)} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{5}{6}\right) + \frac{1}{2} = \frac{11}{12} . \\ x_2^{(2)} = \frac{1}{3} x_1^{(2)} + \frac{1}{3} x_3^{(1)} + \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \times \left(\frac{11}{12}\right) + \frac{1}{3} \times \left(\frac{11}{12}\right) + \frac{2}{3} = \frac{46}{36} \\ x_3^{(2)} = \frac{1}{2} x_2^{(2)} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{46}{36}\right) + \frac{1}{2} = \frac{41}{36} \end{cases}$$

don $X^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{11}{12} \\ \frac{46}{36} \\ \frac{41}{36} \end{pmatrix}$.

4. l'erreur associé à la méthode de Jacobi après les 2 itérations :

$$\|X^{(2)} - X\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} \frac{5}{6} \\ 1 \\ \frac{5}{6} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{3}{2} \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix} \right\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} -\frac{5}{12} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{5}{12} \end{pmatrix} \right\|_2$$

$$= \sqrt{\left(\frac{-5}{12}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{5}{12}\right)^2} = \sqrt{0{,}409} = 0{,}64$$

l'erreur associé à la méthode de G.S après les 2 itérations :

$$\|X^{(2)} - X\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} \frac{11}{12} \\ \frac{46}{36} \\ \frac{41}{36} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{3}{2} \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix} \right\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{9} \\ -\frac{1}{9} \end{pmatrix} \right\|_2$$

$$= \sqrt{\left(\frac{-1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{9}\right)^2 + \left(\frac{-1}{9}\right)^2} = \sqrt{0{,}1728} = 0{,}4157 .$$

si vous avez des questions mon Email : sofianedehilis@gmail.com