Solution de la série N° 01.

Exercice 01:

1. $$\det(A) = \begin{vmatrix} 9 & -3 & -3 \\ -3 & 10 & -4 \\ 3 & -4 & 18 \end{vmatrix} = 9\begin{vmatrix} 10 & -4 \\ -4 & 18 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 3 & 18 \end{vmatrix} + (-3)\begin{vmatrix} -3 & 10 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= 9(180-16) + 3(-54+12) - 3(12-30) = 1404 \neq 0$$

donc le système (1) admet une solution unique.

2. méthode de Cramer :

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} -3 & -3 & -3 \\ -4 & 10 & -4 \\ 18 & -4 & 18 \end{vmatrix}}{1404} = \frac{0}{1404} = 0$$

$$x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 9 & -3 & -3 \\ -3 & -4 & -4 \\ 3 & 18 & 18 \end{vmatrix}}{1404} = \frac{0}{1404} = 0$$

$$x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 9 & -3 & -3 \\ -3 & 10 & -4 \\ 3 & -4 & 18 \end{vmatrix}}{1404} = \frac{1404}{1404} = 1.$$

donc la solution du système (1) est $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. par la méthode de Gauss :
$$\begin{cases} 9x_1 - 3x_2 - 3x_3 = -3 & \dots L_1^{(0)} \\ -3x_1 + 10x_2 - 4x_3 = -4 & \dots L_2^{(0)} \\ 3x_1 - 4x_2 + 18x_3 = 18 & \dots L_3^{(0)} \end{cases}$$

Etape 1 : $\frac{1}{3}L_1^{(0)} + L_2^{(0)} \rightsquigarrow L_2^{(1)}$

$-\frac{1}{3}L_1^{(0)} + L_3^{(0)} \rightsquigarrow L_3^{(1)}$

On obtient :
$$\begin{cases} 9x_1 - 3x_2 - 3x_3 = -3 & \dots L_1^{(0)} \\ 0 + 9x_2 - 5x_3 = -5 & \dots L_2^{(1)} \\ 0 - 3x_2 + 19x_3 = 19 & \dots L_3^{(1)} \end{cases}$$

Etape 2 : $\frac{1}{3}L_2^{(1)} + L_3^{(1)} \rightsquigarrow L_3^{(2)}$

on trouve :
$$\begin{cases} 9x_1 - 3x_2 - 3x_3 = -3 & \dots L_1^{(0)} \\ 9x_2 - 5x_3 = -5 & \dots L_2^{(1)} \\ \frac{52}{3}x_3 = \frac{52}{3} & \dots L_3^{(2)} \end{cases}$$

par la méthode de remontée on obtient :

$$\begin{cases} x_3 = 1 \\ x_2 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases}$$

4. $\det(A_{[1]}) = 9 \neq 0$

$\det(A_{[2]}) = \begin{vmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 10 \end{vmatrix} = 81 \neq 0$

$\det(A_{[3]}) = \begin{vmatrix} 9 & -3 & -3 \\ -3 & 10 & -4 \\ 3 & -4 & 18 \end{vmatrix} = 1404 \neq 0$

alors A admet une décomposition LU.

5. Resolution de ① par la méthode LU :

$$A = LU \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 9 & -3 & -3 \\ -3 & 10 & -4 \\ 3 & -4 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ 0 & U_{22} & U_{23} \\ 0 & 0 & U_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ l_{21}U_{11} & l_{21}U_{12}+U_{22} & l_{21}U_{13}+U_{23} \\ l_{31}U_{11} & l_{31}U_{12}+l_{32}U_{22} & l_{31}U_{13}+l_{32}U_{23}+U_{33} \end{pmatrix}$$

par identification on trouve :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 9 & -3 & -3 \\ 0 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & \frac{52}{3} \end{pmatrix}$$

$$AX = b \Leftrightarrow LUX = b \Leftrightarrow \begin{cases} LY = b & \text{--- ①} \\ UX = Y & \text{--- ②} \end{cases}$$

$$① \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -18 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = -3 \\ -\frac{1}{3}y_1 + y_2 = -4 \\ \frac{1}{3}y_1 - \frac{1}{3}y_2 + y_3 = -18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = -3 \\ y_2 = -5 \\ y_3 = \frac{52}{3} \end{cases} \downarrow$$

$$② \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 9 & -3 & -3 \\ 0 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & \frac{52}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ \frac{52}{3} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x_1 - 3x_2 - 3x_3 = -3 \\ 9x_2 - 5x_3 = -5 \\ \frac{52}{3}x_3 = \frac{52}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \end{cases} \uparrow$$

Exercice 02 :

1. Resolution de (2) par la méthode de Gauss : $\begin{cases} +2x_1 - x_2 = 1 \; \ldots L_1^{(0)} \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 = 2 \; \ldots L_2^{(0)} \\ -x_2 + 2x_3 = 1 \; \ldots L_3^{(0)} \end{cases}$

Étape 01 : $-\left(\frac{-1}{2}\right) L_1^{(0)} + L_2^{(0)} \longrightarrow L_2^{(1)}$

on obtient : $\begin{cases} +2x_1 - x_2 = 1 \; \ldots L_1^{(0)} \\ \frac{5}{2}x_2 - x_3 = \frac{5}{2} \; \ldots L_2^{(1)} \\ -x_2 + 2x_3 = 1 \; \ldots L_3^{(0)} = L_3^{(1)}. \end{cases}$

Étape 02 : $-\left(\frac{-1}{\frac{5}{2}}\right) L_2^{(1)} + L_3^{(1)} \rightarrow L_3^{(2)}$

on obtient $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \; \ldots L_1^{(0)} \\ \frac{5}{2}x_2 - x_3 = \frac{5}{2} \; \ldots L_2^{(1)} \\ \frac{8}{5}x_3 = 2 \end{cases}$

par la méthode de remontée on trouve :

$\begin{cases} x_3 = \frac{5}{4} \\ x_2 = \frac{3}{2} \\ x_1 = \frac{5}{4}. \end{cases}$

2. la décomposition $A = LU$, avec $l_{ii} = 1$, $i = 1, \ldots, 3$.

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12} + u_{22} & l_{21}u_{13} + u_{23} \\ l_{31}u_{11} & l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} & l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} \end{pmatrix}$$

par identification on trouve :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{5} & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{8}{5} \end{pmatrix}$$