Exercices sur Dérivation numérique

Exercise 1 *En utilisant les données suivantes, trouvez* $f'(6.0)$, *error* $= \mathcal{O}(h)$ *et* $f''(6.3)$, *error* $= \mathcal{O}(h^2)$

x	6.0	6.1	6.2	6.3	6.4
$f(x)$	0.1750	−0.1998	−0.2223	−0.2422	−0.2596

Solution 2 *La méthode de* $\mathcal{O}(h)$ *pour* $f'(x_0)$ *est donnée par*

$$f'(x_0) = \frac{1}{h}\left[f(x_0+h) - f(x_0)\right]$$

Avec $x_0 = 6.0$ *et* $h = 0.1$, *on obtient*

$$\begin{aligned} f'(6.0) &= \frac{1}{0.1}[f(6.1) - f(6.0)] \\ &= \frac{1}{0.1}[-0.1998 - 0.1750] = -3.748. \end{aligned}$$

La méthode de $\mathcal{O}(h^2)$ pour $f''(x_0)$ est donnée par

$$f''(x_0) = \frac{1}{h^2}[f(x_0-h) - 2f(x_0) + f(x_0+h)]$$

Avec $x_0 = 6.3$ et $h = 0.1$, on obtient

$$f''(6.3) = \frac{1}{(0.1)^2}[f(6.2) - 2f(6.3) + f(6.4)] = 0.25.$$

Avec $x_0 = 6.1$ et $h = 0.1$, on obtient

$$\begin{aligned} f''(6.1) &= \frac{1}{(0.1)^2}[f(6.1-0.1) - 2f(6.1) + f(6.1+0.1)] \\ &= \frac{1}{(0.01)}[f(6.0) - 2f(6.1) + f(6.2)] \\ &= \frac{1}{(0.01)}[0.1750 + 2\times 0.1998 - 0.2223] \\ &= 35.23 \end{aligned}$$

Exercise 3 *1. Utilisez les formules de différence avant et les formules de différence arrière pour déterminer chaque entrée manquante dans les tableaux suivants.*
a.

x	$f(x)$	$f'(x)$
0.5	0.4794	
0.6	0.5646	
0.7	0.6442	

b.

x	$f(x)$	$f'(x)$
0.0	0.00000	
0.2	0.74140	
0.4	1.3718	

2. Les données de la première partie de l'exercice ont été prises à partir des fonctions suivantes. Calculez les erreurs réelles de l'exercice et trouvez les limites d'erreur à l'aide des formules d'erreur.
a. $f(x) = \sin x$ *b.* $f(x) = e^x - 2x^2 + 3x - 1$

Solution 4 *1. À partir de la formule de différence avant-arrière (2.5), nous avons les approximations suivantes:*
a.

x	$f(x)$	$f'(x)$
0.5	0.4794	0.8520
0.6	0.5646	0.8520
0.7	0.6442	0.7960

b.

x	$f(x)$	$f'(x)$
0.0	0.00000	3.7070
0.2	0.74140	3.1520
0.4	1.3718	3.1520

2. **a.**

x	Erreur réelle	Approx. d'E
0.5	0.0255	0.0282
0.6	0.0267	0.0282
0.7	0.0312	0.0322

b.

x	Erreur réelle	Approx. d'E
0.0	0.2930	0.3000
0.2	0.2694	0.2779
0.4	0.2602	0.2779

Exercise 5 *Compte tenu des données suivantes:*

x	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
$f(x)$	0.6133	0.7822	0.9716	1.1814	1.4117

Trouver la deuxième dérivée $f'(x)$ au point $x = 1.3$.
(a) Utilisez la formule de différence avant trois points .
(b) Utilisez la formule de différence en arrière en trois points.
(c) Utilisez la formule de différence centrale en trois points.

Exercise 6 *Compte tenu des données suivantes:*

x	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$f(x)$	5.2296	3.6155	2.7531	2.2717	2

Trouver la deuxième dérivée $f''(x)$ au point $x = 0.8$.
(a) Utilisez la formule de différence avant trois points.
(b) Utilisez la formule de différence en arrière en trois points.
(c) Utilisez la formule de différence centrale en trois points.

Exercise 7 *À partir des données suivantes :*

x	1.00	1.01	1.02
$f(x)$	1.27	1.32	1.38

calculer les approximations de $f'(1.005)$, $f'(1.015)$ et $f''(1.01)$ à l'aide des formules de différences centrées. Si les valeurs de $f(x)$ sont précises à ± 0.005, quelle est l'erreur maximale sur chacune des approximations ?

Exercise 8 *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$* ***une fonction de classe au moins*** *C^5 sur l'intervalle $[a, b]$. On se fixe un nombre $(h > 0)$ "petit" ainsi qu'un point quelconque $x \in]a, b[$. Soit le rapport*

$$A = \frac{f(x + 3h) - 3f(x + h) + 3f(x - h) - f(x - 3h)}{8h^3}$$

Montrer que le rapport A ***approche une dérivée de f que l'on déterminera.*** *Donner* ***l'ordre de précision de cette approximation.***

Solution 9 *Effectuons les développements de Taylor de f au voisinage de x jusqu'à l'ordre 4 avec un reste en $\mathcal{O}(h^5)$:*

$$f(x + h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \frac{h^4}{4!}f''''(x) + \mathcal{O}\left(h^5\right), \quad (1)$$

$$f(x - h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) - \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \frac{h^4}{4!}f''''(x) + \mathcal{O}\left(h^5\right), \quad (2)$$

$$f(x+3h) = f(x)+(3h)\,f'(x)+\frac{(3h)^2}{2!}f''(x)+\frac{(3h)^3}{3!}f'''(x)+\frac{(3h)^4}{4!}f''''(x)+\mathcal{O}\left(h^5\right), \quad (3)$$

$$f(x-3h) = f(x)-(3h)\,f'(x)+\frac{(3h)^2}{2!}f''(x)-\frac{(3h)^3}{3!}f'''(x)+\frac{(3h)^4}{4!}f''''(x)+\mathcal{O}\left(h^5\right). \quad (4)$$

Le numérateur du rapport A s'écrit alors:

$$(3) - 3 \times (1) + 3 \times (2) - (4) = 8h^3 f'''(x) + \mathcal{O}\left(h^5\right).$$

Autrement dit, $A = f'''(x) + \mathcal{O}\left(h^2\right)$.
D'où, A approxime la dérivée troisième de f en x, avec une erreur en $\mathcal{O}\left(h^2\right)$.