Interpolation

1 Méthode de Lagrange

Exercise 1 *Soit* $f(x) = \ln(1+x)$, $x_0 = 1$ *et* $x_1 = 1.1$. *Utilisez* ***l'interpolation linéaire*** *pour calculer une valeur approximative de* $f(1.04)$ *et obtenir une limite sur* ***l'erreur de troncature.***

Solution 2 *On a*

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(1+x), \\ f(1.0) &= \ln(2) = 0.693147, \\ f(1.1) &= \ln(2.1) = 0.741937. \end{aligned}$$

ou

x	1	1.1
$f(x)$	0.693147	0.741937.

Nous avons ***Le polynôme interpolant de Lagrange*** *est obtenu comme*

$$\begin{aligned} P_1(x) &= L_0(x)f(x_0) + L_1(x)\,f(x_1) \\ &= \frac{x-1.1}{1.0-1.1}\,(0.693147) + \frac{x-1}{1.1-1.0}\,(0.741937) \end{aligned}$$

ce qui donne

$$P_1(1.04) = 0.712663.$$

L'erreur d'interpolation linéaire *est donnée par*

$$EI = \frac{f^{(2)}(\xi)}{2!}(x-x_0)(x-x_1), \quad x_0 < \xi < x_1$$

Par conséquent, nous obtenons ***la borne de l'erreur*** *comme*

$$|EI| \leqslant \frac{1}{2} \max_{1<x<1.1} |(x-x_0)(x-x_1)| \max_{1<x<1.1} |f''(x)|\,.$$

Puisque le maximum de $(x-x_0)(x-x_1)$ *est obtenu à* $x = (x_0+x_1)/2$ *et* $f''(x) = -1/(1+x)^2$, *on obtient*

$$\begin{aligned} |EI| &\leqslant \frac{1}{2}\frac{(x_0-x_1)^2}{4} \max_{1<x<1.1}\left|\frac{1}{(1+x)^2}\right| \\ &= \frac{(0.1)^2}{8}\cdot\frac{1}{4} = 0.0003125. \end{aligned}$$

Exercise 3 *En utilisant les données* $\sin(0.1) = 0.09983$ *et* $\sin(0.2) = 0.19867$, *trouvez une valeur approximative de* $\sin(0.15)$ *par* ***interpolation de Lagrange.*** *Obtenez une limite sur l'erreur à* $x = 0.15$.

Solution 4 *Nous avons deux valeurs de données. Le polynôme linéaire de Lagrange est donné par*

$$\begin{aligned} P_1(x) &= L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) \\ &= \frac{x-x_1}{x_0-x_1}f(x_0) + \frac{x-x_0}{x_1-x_0}f(x_1) \\ &= \frac{x-0.2}{0.1-0.2}(0.09983) + \frac{x-0.1}{0.2-0.1}(0.19867)\,. \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} f(0.15) &= P_1(0.15) = \frac{0.15-0.2}{0.1-0.2}(0.09983) + \frac{0.15-0.1}{0.2-0.1}(0.19867) \\ &= (0.5)(0.09983) + (0.5)(0.19867) = 0.14925. \end{aligned}$$

L'erreur de troncature est donnée par

$$EI = \frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)(x-x_1) = \frac{1}{2}(x-0.1)(x-0.2)(-\sin\xi)\,, \quad 0.1 < \xi < 0.2.$$

puisque $f(x) = \sin x$. *À* $x = 0.15$, *nous obtenons la borne comme*

$$EI = \frac{1}{2}(0.15-0.1)(0.15-0.2)(-\sin\xi) = 0.00125\sin\xi$$

et

$$\begin{aligned} |EI| &= 0,00125\,|\sin\xi| \leqslant 0.00125 \max_{0.1\leqslant x\leqslant 0.2}|\sin x| \\ &= 0.00125\sin(0.2) \leqslant 0.00125\,(0.19867) = 0.00025. \end{aligned}$$

Exercise 5 *Utilisez* ***la formule de Lagrange****, pour trouver* ***le polynôme quadratique*** *qui prend les valeurs*

x	0	1	3
$f(x)$	1	3	55

Solution 6 *Étant donné que* $f(0) = 1$, $f(1) = 3$, $f(3) = 55$, *trouvez le polynôme unique de degré* 2 *ou moins, qui correspond aux données données.*

$$\begin{aligned} L_0(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-1)(x-3)}{(-1)(-3)} = \frac{1}{3}\left(x^2-4x+3\right), \\ L_1(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{x(x-3)}{(1)(-2)} = \frac{1}{2}\left(3x-x^2\right), \\ L_2(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{x(x-1)}{(3)(2)} = \frac{1}{6}\left(x^2-x\right). \end{aligned}$$

Par conséquent, le ***polynôme quadratique*** *de Lagrange est donné par*

$$\begin{aligned} P_2(x) &= L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2) \\ &= \frac{1}{3}\left(x^2-4x+3\right) + \frac{3}{2}\left(3x-x^2\right) + \frac{55}{6}\left(x^2-x\right) = 8x^2-6x+1. \end{aligned}$$

Exercise 7 *Les valeurs suivantes de la fonction* $f(x) = \sin x + \cos x$*, sont données*

x	$10°$	$20°$	$30°$
$f(x)$	1.1585	1.2817	1.3660

Construisez le ***polynôme quadratique*** *d'****interpolation de Lagrange*** *qui correspond aux données. Par conséquent, trouvez* $f(\pi/12)$*. Comparez avec la valeur exacte.*

Solution 8 *Puisque la valeur de* f *à* $\pi/12$ *radians est requise, nous convertissons les données en mesure de radian. Nous avons*

$$\begin{aligned} x_0 &= 10° = \frac{\pi}{18} = 0.1745, \\ x_1 &= 20° = \frac{\pi}{9} = 0.3491, \\ x_2 &= 30° = \frac{\pi}{6} = 0.5236. \end{aligned}$$

Les polynômes fondamentaux de Lagrange sont donnés par

$$\begin{aligned} L_0(x) &= \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{(x - 0.3491)(x - 0.5236)}{(0.1745 - 0.3491)(0.1745 - 0.5236)} \\ &= 16.4061\left(x^2 - 0.8727x + 0.1828\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_1(x) &= \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{(x - 0.1745)(x - 0.5236)}{(0.3491 - 0.1745)(0.3491 - 0.5236)} \\ &= -32.8216\left(x^2 - 0.6981x + 0.09141\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_2(x) &= \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{(x - 0.1745)(x - 0.3491)}{(0.5236 - 0.1745)(0.5236 - 0.3491)} \\ &= 16.4155\left(x^2 - 0.5236x + 0.0609\right). \end{aligned}$$

Le polynôme quadratique de Lagrange *est donné par*

$$\begin{aligned} P_2(x) &= L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2) \\ &= 16,4061(x^2 - 0,8727x + 0,1828)(1,1585) - 32,8616(x^2 - 0,6981x \\ &\quad +0,0914)(1,2817) + 16,4155(x^2 - 0,5236x + 0,0609)(1,3660) \\ &= -0,6374x^2 + 1,0394x + 0,9950. \end{aligned}$$

$$f(\pi/12) = f(0.2618) = 1.2234.$$

La valeur exacte est

$$f(0.2618) = \sin(0,2618) + \cos(0,2618) = 1,2247.$$

Exercise 9 *Construire le polynôme d'**interpolation de Lagrange** pour les données*

x	-1	1	4	7
$f(x)$	-2	0	63	342

Par conséquent, interpolez à $x = 5$.

Solution 10 *Les polynômes fondamentaux de Lagrange sont donnés par*

$$\begin{aligned} L_0(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{(x-1)(x-4)(x-7)}{(-1-1)(-1-4)(-1-7)} \\ &= -\frac{1}{80}\left(x^3-12x^2+39x-28\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_1(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(x-1)(x-4)(x-7)}{(1+1)(1-4)(1-7)} \\ &= \frac{1}{36}\left(x^3-10x^2+17x+28\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_2(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{(x+1)(x-1)(x-7)}{(4+1)(4-1)(4-7)} \\ &= -\frac{1}{45}\left(x^3-7x^2-x+7\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_3(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_0)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_2)(x_3-x_2)} = \frac{(x+1)(x-1)(x-4)}{(7+1)(7-4)(7-4)} \\ &= \frac{1}{144}\left(x^3-4x^2-x+4\right). \end{aligned}$$

Notez que nous n'avons pas besoin de calculer $L_1(x)$ puisque $f(x_1) = 0$. Le polynôme d'interpolation de Lagrange est donné par

$$\begin{aligned} P_3(x) &= L_0(x)f(x_0)+L_1(x)f(x_1)+L_2(x)f(x_2)+L_3(x)f(x_3) \\ &= -\frac{1}{80}\left(x^3-12x^2+39x-28\right)(-2)-\frac{1}{45}\left(x^3-7x^2-x+7\right)(63) \\ &\quad +\frac{1}{144}\left(x^3-4x^2-x+4\right)(342) \\ &= \left(\frac{1}{40}-\frac{7}{5}+\frac{171}{72}\right)x^3+\left(-\frac{3}{10}+\frac{49}{5}-\frac{171}{18}\right)x^2 \\ &\quad +\left(\frac{39}{40}+\frac{7}{5}-\frac{171}{72}\right)x+\left(-\frac{7}{10}-\frac{49}{5}+\frac{171}{8}\right) \\ &= x^3-1. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$f(5) = P_3(5) = 5^3-1 = 124.$$

Exercise 11 *En désignant l'interpolant de $f(x)$ sur l'ensemble des points (distincts) $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n$ par $\sum_{i=0}^{n} L_i(x) f(x_i)$, trouvez une expression pour*

$$\sum_{i=0}^{n} L_i(0) x_i^{n+1}.$$

$$f(x) = x^{n+1}$$

Solution 12 *On a*

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) f(x_i) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n).$$

En laissant $f(x) = x^{n+1}$, nous obtenons

$$x^{n+1} = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) x_i^{n+1} + (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n).$$

En prenant $x = 0$, on obtient

$$\sum_{i=0}^{n} L_i(0) x_i^{n+1} = (-1)^n x_0 x_1 \cdots x_n.$$

Exercise 13 *Trouver $f(x)$ comme polynôme dans x pour les données suivantes par* ***la formule de différence divisée de Newton***

x	$x_0 = -4$	$x_1 = -1$	$x_2 = 0$	$x_3 = 2$	$x_4 = 5$
$f(x)$	1245	33	5	9	1335

Solution 14 *Nous formons le tableau des différences divisées pour les données. La formule de différence divisée de Newton donne*

x	$f(x)$	Premier d.d $f[x_0, x_1]$	Deuxième d.d $f[x_0, x_1, x_2]$	Troisième d.d $f[x_0, x_1, x_2, x_3]$	Quatrième d.d $f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$
-4	1245				
		-404			
-1	33		94		
		-28		-14	
0	5		10		3
		2		13	
2	9		88		
		442			
5	1335				

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(x_0) + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) \\
&\quad + f[x_0,x_1,x_2,x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \\
&\quad + f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) \\
&= 1245 + (x+4)(-404) + (x+4)(x+1)(94) + (x+4)(x+1)x(-14) \\
&\quad + (x+4)(x+1)x(x-2)(3) \\
&= 1245 - 404x - 1616 + (x^2+5x+4)(94) + (x^3+5x^2+4x)(-14) \\
&\quad + (x^4+3x^3-6x^2-8x)(3) \\
&= 3x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 14x + 5.
\end{aligned}
$$

Table des différences divisées

Exercise 15 *Trouver $f(x)$ comme polynôme dans x pour les données suivantes par* ***la formule de différence divisée de Newton***

x	-2	-1	0	1	3	4
$f(x)$	9	16	17	18	44	81

Par conséquent, interpolez à $x = 0.5$ et $x = 3.1$.

Solution 16 *Nous formons le tableau des différences divisées pour les données données.*

Puisque les différences du quatrième ordre sont des zéros, les données représentent un polynôme du troisième degré. La formule de différence divisée de Newton donne le polynôme comme

x	$f(x)$	*Premier d.d*	*Deuxième d.d*	*Troisième d.d*	*Quatrième d.d*
-2	9				
		7			
-1	16		-3		
		1		1	
0	17		0		0
		1		1	
1	18		4		0
		13		1	
3	44		8		
		37			
4	81				

Table des différences divisées

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)\\
&\quad +f[x_0,x_1,x_2,x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\\
&\quad +f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\\
&= 9+(x+2)(7)+(x+2)(x+1)(-3)+(x+2)(x+1)x(1)\\
&= 9+7x+14-3x^2-9x-6+x^3+3x^2+2x=x^3+17.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
f(0.5) &= (0,5)3+17=17,125,\\
f(3.1) &= (3,1)3+17=47,791.
\end{aligned}$$

Exercise 17 *Trouver $f(x)$ comme polynôme dans x pour les données suivantes par* ***la formule de différence divisée de Newton***

x	1	3	4	5	7	10
$f(x)$	3	31	69	131	351	1011

Par conséquent, interpolez à $x=3.5$ et $x=8.0$. Trouvez également $f'(3)$ et $f''(1.5)$.

Solution 18

x	$f(x)$	*Premier d.d*	*Deuxième d.d*	*Troisième d.d*	*Quatrième d.d*
1	3				
		14			
3	31		8		
		38		1	
4	69		12		0
		62		1	
5	131		16		0
		110		1	
7	351		22		
		220			
10	1011				

Puisque les différences du quatrième ordre sont des zéros, les données représentent un troisième degré polynôme. La formule de différence divisée de Newton donne le polynôme comme

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)\\
&\quad +f[x_0,x_1,x_2,x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\\
&= 3+(x-1)(14)+(x-1)(x-3)(8)+(x-1)(x-3)(x-4)(1)\\
&= 3+14x-14+8x^2-32x+24+x^3-8x^2+19x-12=x^3+x+1.
\end{aligned}$$

D'où

$$f(3,5) \approx P_3(3,5) = (3,5)^3 + 3,5 + 1 = 47,375,$$
$$f(8,0) \approx P_3(8,0) = (8,0)^3 + 8,0 + 1 = 521,0.$$

Maintenant,

$$P_3'(x) = 3x^2 + 1 \quad et \quad P_3''(x) = 6x.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} f'(3) &\approx P'(3) = 3(9) + 1 = 28, \\ f''(1,5) &\approx P''(1,5) = 6(1,5) = 9. \end{aligned}$$

Exercise 19 *Trouver l'unique polynôme $P(x)$ de degré 2 ou moins tel que*

$$P(1) = 1, \quad P(3) = 27, \quad P(4) = 64$$

en utilisant chacune des méthodes suivantes:
(i) formule d'interpolation de Lagrange,
(ii) formule de différence divisée par Newton.

Solution 20 *(i) En utilisant **l'interpolation de Lagrange**, on obtient*

$$\begin{aligned} P_2(x) &= L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2) \\ &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f(x_2) \\ &= \frac{(x-4)(x-3)}{(1-4)(1-3)}(1) + \frac{(x-1)(x-4)}{(3-1)(3-4)}(27) + \frac{(x-1)(x-3)}{(4-1)(4-3)}(64) \\ &= \frac{1}{6}\left(x^2 - 7x + 12\right) - \frac{27}{2}\left(x^2 - 5x + 4\right) + \frac{64}{3}\left(x^2 - 4x + 3\right) \\ &= 8x^2 - 19x + 12. \end{aligned}$$

(ii) Nous formons la table des différences divisées

x	$P(x)$		
1	1		
		13	
3	27		8
		37	
4	64		

En utilisant la formule de différence divisée de Newton, nous obtenons

$$\begin{aligned} P_2(x) &= f(x_0) + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) \\ &= 1 + (x-1)(13) + (x-1)(x-3)(8) \\ &= 8x^2 - 19x + 12. \end{aligned}$$

On obtient

$$P_2(1.5) = 1.5.$$

Exercise 21 *Utilisez les formules de différence de Lagrange et de Newton-divisé pour calculer $f(3)$ à partir du tableau suivant:*

$$\begin{array}{ccccccc} x & 0 & 1 & 2 & 4 & 5 & 6 \\ f(x) & 1 & 14 & 15 & 5 & 6 & 19 \end{array}$$

En utilisant la formule d'interpolation de Lagrange, nous obtenons

$$\begin{aligned} P_5(x) &= f(x_0) + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) \\ &\quad + f[x_0,x_1,x_2,x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \\ &\quad + f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) \\ &\quad + f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4,x_5](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4) \\ &= \frac{1}{240}(x-1)(x-2)(x-4)(x-5)(x-6) \\ &\quad + \frac{14}{60}(x)(x-2)(x-4)(x-5)(x-6) \\ &\quad - \frac{15}{48}(x)(x-1)(x-4)(x-5)(x-6) \\ &\quad + \frac{5}{48}(x)(x-1)(x-2)(x-5)(x-6) \\ &\quad - \frac{6}{60}(x)(x-1)(x-2)(x-4)(x-6) \\ &\quad + \frac{19}{240}(x)(x-1)(x-2)(x-4)(x-5) \end{aligned}$$

ce qui donne

$$f(3) = P_5(3) = 10.$$

Pour utiliser la formule d'interpolation des différences divisées de Newton, nous construisons d'abord la table des différences divisées

x	$f(x)$	*Premier d.d*	*Deuxième d.d*	*Troisième d.d*	*Quatrième d.d*	*Cinqième d.d*
0	1					
		13				
1	14					
			-6			
		1		1		
2	15					
			-2		0	
		-5		1		0
4	5					
			1		0	
		1		1		
5	6					
			6			
		13				
6	19					

Nous obtenons le polynôme d'interpolation de différence divisée de Newton comme

$$\begin{aligned} P_5(x) &= 1 + 13x - 6x(x-1) + x(x-1)(x-2) \\ &= x^3 - 9x^2 + 21x + 1 \end{aligned}$$

ce qui donne

$$f(3) = P_5(3) = 10.$$

Exercise 22 *1. Pour les fonctions $f(x)$ données, soit $x_0 = 0$, $x_1 = 0,6$ et $x_2 = 0,9$. Construisez des polynômes d'interpolation de degré au plus un et au plus deux pour approximer $f(0,45)$, et trouvez l'erreur absolue.*

a. $f(x) = \cos x$,

b. $f(x) = \ln(x+1)$.

2. Utilisez le Théorème 9 pour trouver une borne d'erreur pour les approximations ci-dessus.

1. a.

$$P_1(x) = -0.148878x + 1;\ P_2(x) = -0.452592x2 - 0.0131009x + 1;$$
$$P_1(x)(0.45) = 0.933005;$$
$$|f(0.45) - P_1(0.45)| = 0.032558;\ P_2(0.45) = 0.902455;$$
$$|f(0.45) - P_2(0.45)| = 0.002008$$

b.

$$P_1(x) = 0.874548x;\ P_2(x) = -0.268961x2 + 0.955236x;$$
$$P_1(0.45) = 0.393546;$$
$$|f(0.45) - P_1(0.45)| = 0.0212983;\ P_2(0.45) = 0.375392;$$
$$f(0.45) - P_2(0.45) = 0.003828$$

Exercise 23 *Soit $P_3(x)$ le polynôme d'interpolation pour les données $(0,0)$, $(0.5, y)$, $(1,3)$ et $(2,2)$. Le coefficient de x^3 dans $P_3(x)$ est 6. Trouvez y.*

Solution 24 $y = 1.25$.

Exercise 25 *Construisez les polynômes d'interpolation de Lagrange pour les fonctions suivantes et trouvez une borne pour l'erreur absolue sur l'intervalle $[x_0, x_n]$.*

a.

$$f(x) = e^{2x}\cos 3x,\ x_0 = 0,\ x_1 = 0,3,\ x_2 = 0,6,\ n = 2$$

b.

$$f(x) = \ln x,\ x_0 = 1,\ x_1 = 1.1,\ x_2 = 1.3,\ x_3 = 1.4,\ n = 3.$$

a.

$$P_2(x) = -11.22388889x^2 + 3.810500000x + 1,$$

and an error bound is

$$0.11371294.$$

b.

$$P_3(x) = 0.1970056667x^3 - 1.06259055x^2 + 2.532453189x - 1.666868305,$$

and an error bound is 10.