Université Larbi Ben M'Hidi

Faculté des Sciences et des Sciences Appliquées

Département Génie Mécanique

Cours d'Elasticité

Dr. MOKHTARI 2022/2023

Contenu chapitre 2

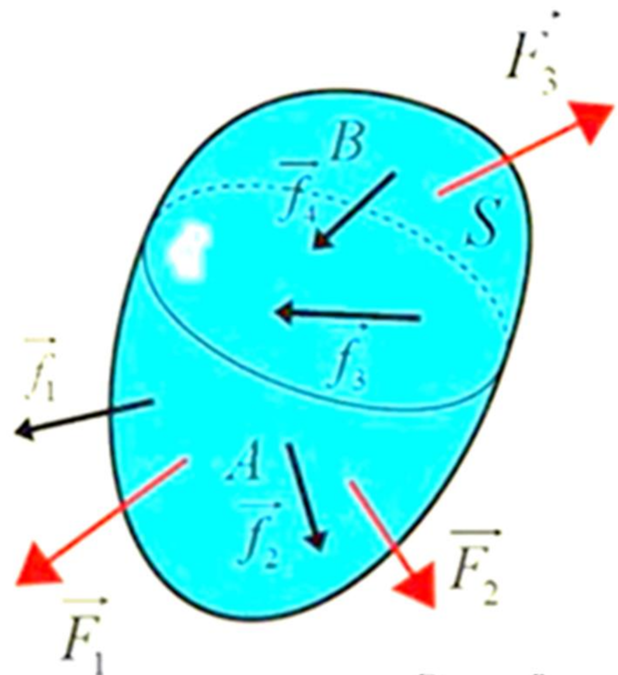
Chapitre 2: Tenseur des contraintes

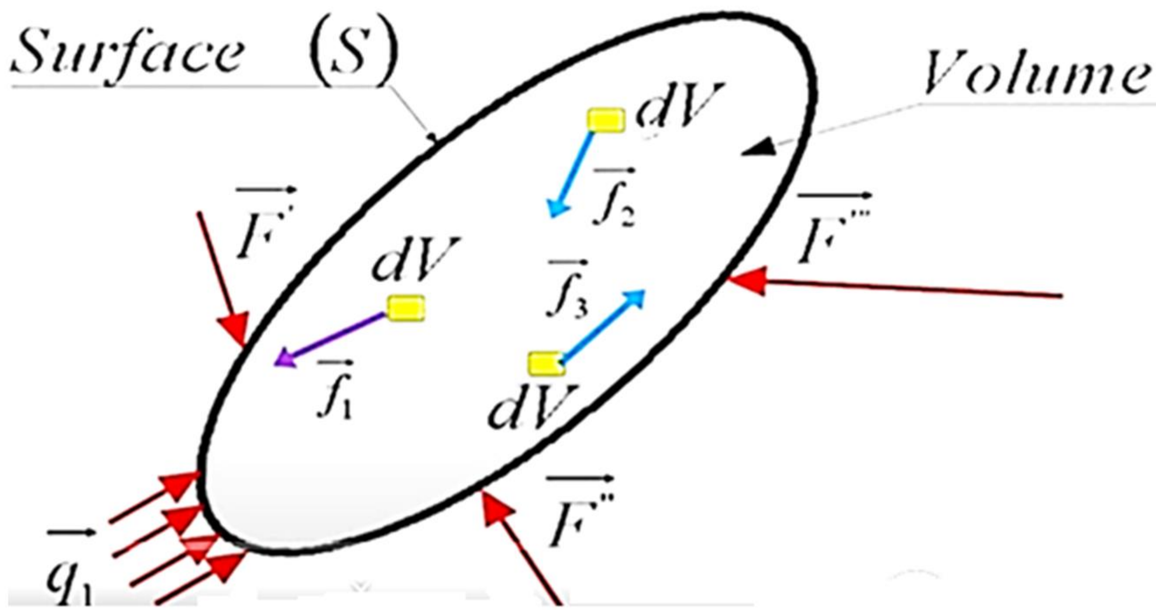
I. Coupure, facette et vecteur contrainte
II. Formule de Cauchy, tenseur des contraintes
III. Contraintes principales et invariants
IV. Equations d'équilibre
V. Tenseur sphérique et déviateur
VI. Tenseur de contraintes particuliers
VII. Représentation géométrique des cercles de Mohr

I. Coupure, facette et vecteur contrainte
I.1. Vecteur contrainte

- **I.1. Forces extérieures et intérieures**
- Un solide est en équilibre sous l'actions **d'efforts extérieurs**, nous distinguons deux type de forces extérieures:

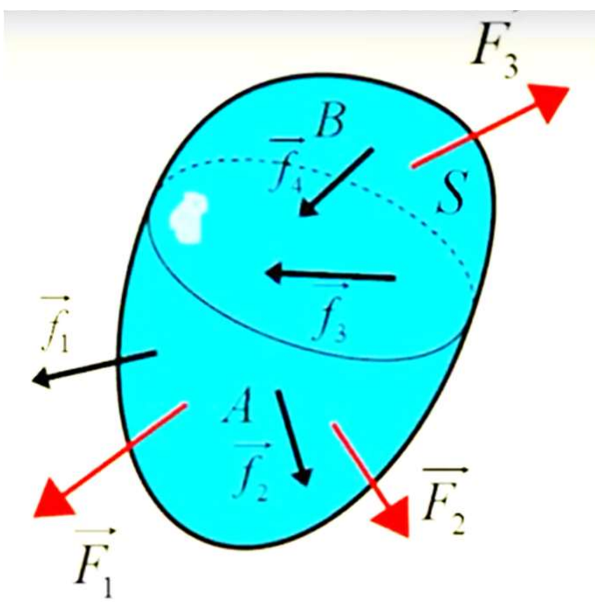
- Des **forces extérieurs volumiques** repartie dans le volume et exercées a distance. Elles sont définies par une densité volumique d'efforts $\vec{f}$ s'exercent sut toutes les particules du solide. (la force de pesanteur ou les forces électromagnétiquesL
- Des **forces extérieurs concentrées** $\vec{F}$ qui s'exercent sur la suface (S) délimitant le solide.

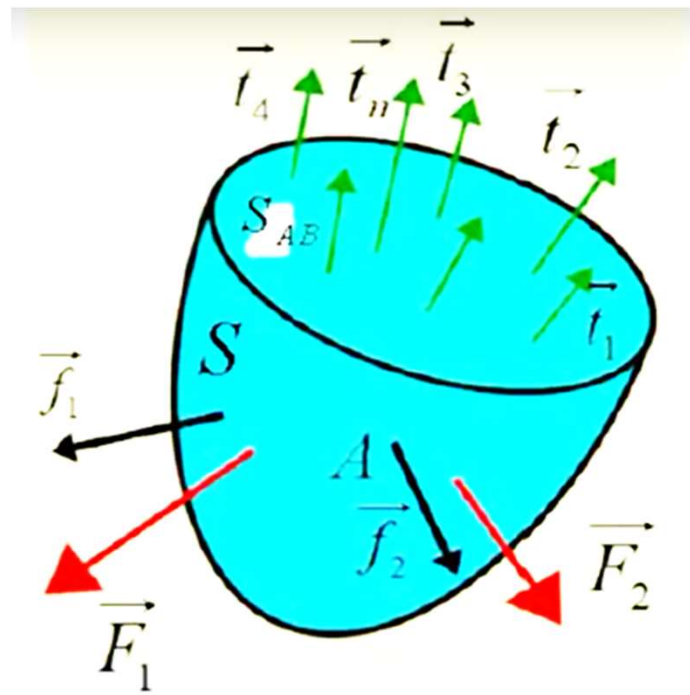

F_3
B
$\vec{f_4}$
S
$\vec{f_3}$
$\vec{f_1}$
A
$\vec{f_2}$
$\vec{F_2}$
$\vec{F_1}$


Surface (S)
Volume
dV
$\vec{f_2}$
$\vec{F'}$
$\vec{F'''}$
dV
$\vec{f_3}$
$\vec{f_1}$
dV
$\vec{F''}$
$\vec{q_1}$

I.2. Coupure et facette

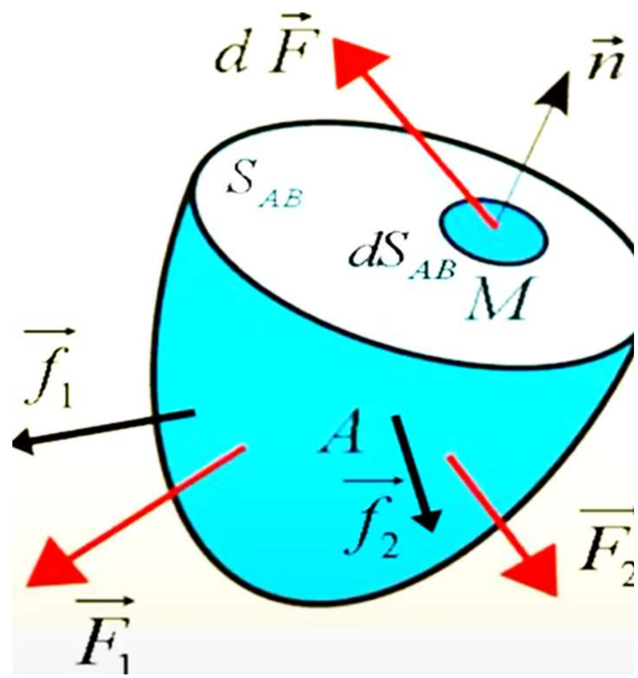
- Considérons donc un solide occupant un domaine (D). En chaque point M de ce solide, il existe des forces internes que l'on peut déterminer en effectuant une coupure du solide, par une surface S, en deux parties A et B.
- La partie A est en équilibre sous l'action des forces externes qui lui sont appliquées et des forces internes réparties sur la coupure.





1.3. Définition du vecteur contrainte

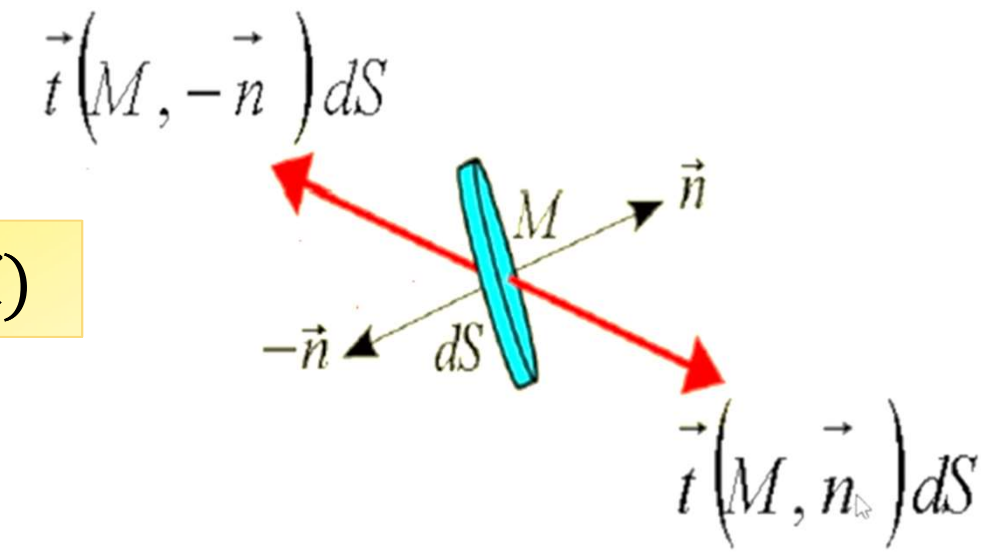
- On appelle vecteur contrainte, eau point **M** agissant sur la facette de normale **n**:
- $\vec{t}(M,\vec{n}) = \lim_{dS_A \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta F}}{\Delta S_{AB}} = \frac{\overrightarrow{dF}}{\overrightarrow{dS_{AB}}}$ (N/mm²)
-



1.4. Principe des actions mutuelles relatifs au vecteur contrainte

- Considérant en un point M, le cylindre infiniment petit d’axe n de hauteur h et de section dS.
- Quand h tend vers 0, le cylindre esr en equilibre sous l’action des force: $\vec{t}(M, \vec{n})$ et $\vec{t}(M, -\vec{n})$

$$\vec{t}(M, -\vec{n}) = -\vec{t}(M, \vec{n})$$



1.4.Contrainte normale σ_n et contrainte tangentielle τ_n

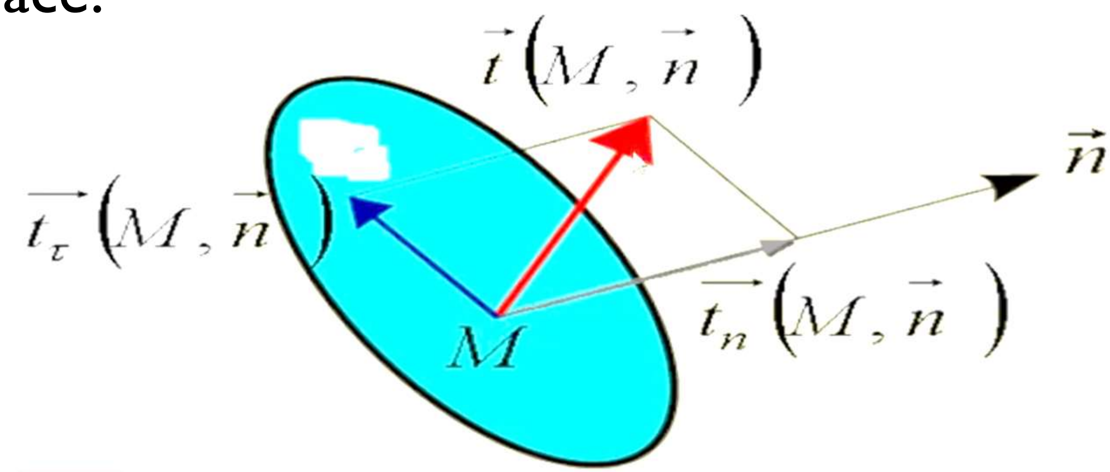
Le vecteur contrainte peut être décomposé en deux composantes:

Une composante normale $\overrightarrow{\boldsymbol{t_n}}(\boldsymbol{M}, \vec{\boldsymbol{n}})$

Une composante tangentielle ou de cicaillement $\overrightarrow{\boldsymbol{t_\tau}}(\boldsymbol{M}, \vec{\boldsymbol{n}})$

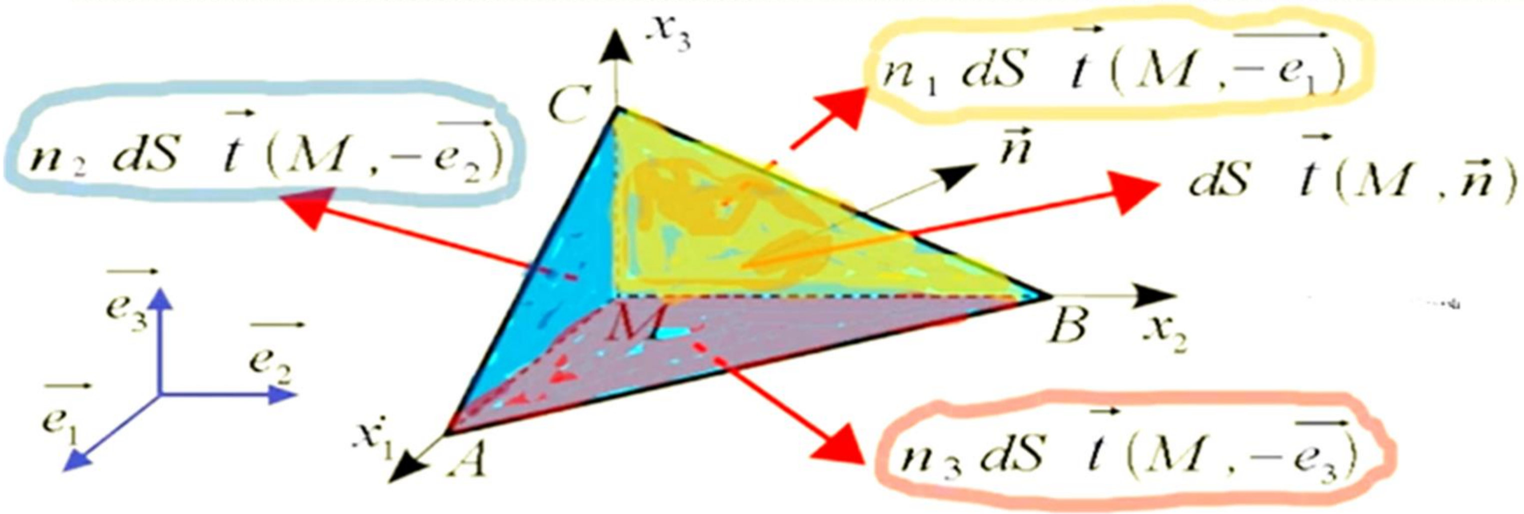
Ceci permet d'écrire $\overrightarrow{\boldsymbol{t}}(\boldsymbol{M}, \vec{\boldsymbol{n}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{t_n}}(\boldsymbol{M}, \vec{\boldsymbol{n}})\vec{\boldsymbol{n}} + \overrightarrow{\boldsymbol{t_\tau}}(\boldsymbol{M}, \vec{\boldsymbol{n}})$

Les composantes du vecteur contrainte représentent des forces rapportées a une surface.



II. Formule de Cauchy, tenseur des contraintes

2.1. Equilibre d'un tétraèdre



$$\vec{n}\begin{cases} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{cases}$$

Facette	Aire de la facette	Vecteur contrainte agissant sur la facette	Résultante des efforts surfaciques appliqués à la facette
ABC	dS	$\vec{t}(M, \vec{n})$	$\vec{t}(M, \vec{n})\,dS$
MBC	$n_1 dS$	$\vec{t}(M, -\vec{e}_1)$	$\vec{t}(M, -\vec{e}_1)\,n_1\,dS$
MAC	$n_2 dS$	$\vec{t}(M, -\vec{e}_2)$	$\vec{t}(M, -\vec{e}_2)\,n_2\,dS$
MAB	$n_3 dS$	$\vec{t}(M, -\vec{e}_3)$	$\vec{t}(M, -\vec{e}_3)\,n_3\,dS$

- L’équation d’équilibre des tétraèdre s’écrit comme suit:
- $\vec{t}(M,-\overrightarrow{e_1})n_1+\vec{t}(M,-\overrightarrow{e_2})n_2+\vec{t}(M,-\overrightarrow{e_3})n_3+\vec{t}(M,-\vec{n})=\vec{0}$
- *Ce qui implique :*
- $-\vec{t}(M,\overrightarrow{e_1})n_1-\vec{t}(M,\overrightarrow{e_2})n_2-\vec{t}(M,\overrightarrow{e_3})n_3+\vec{t}(M,\vec{n})=\vec{0}$

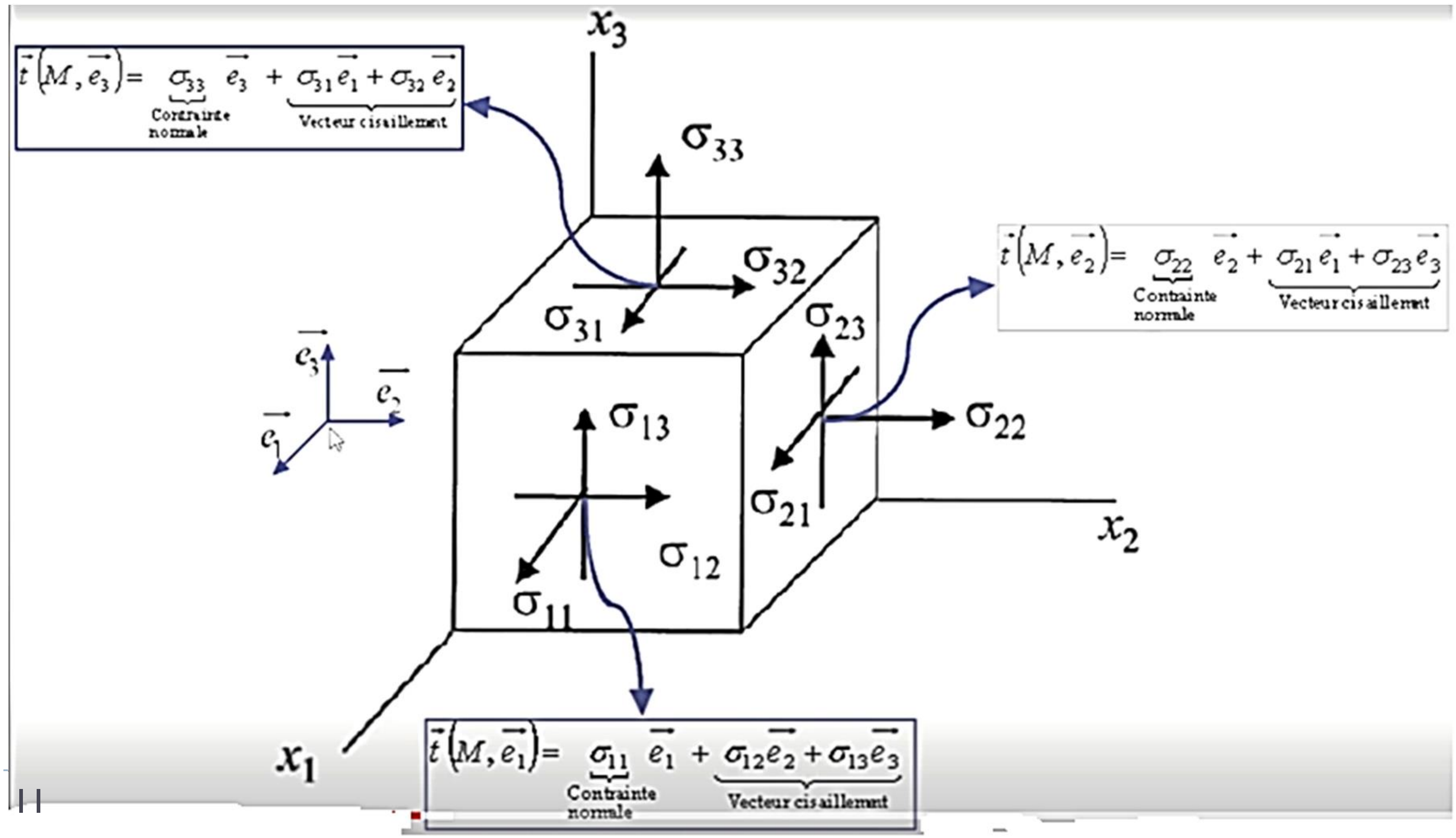
Par voie de conséquence, nous avons déterminé la relation entre le vecteur contrainte $\vec{t}(M,\vec{n})$ agissant sur la facette ABC dont la normale est $\vec{n}$ et les trois autres vecteurs contraintes à savoir $\vec{t}(M,\vec{e}_1)$, $\vec{t}(M,\vec{e}_2)$ et $\vec{t}(M,\vec{e}_3)$ agissant sur des facettes perpendiculaires deux à deux et dont les normales sont respectivement des vecteurs unitaires $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$ de la base de référence; ceci se traduit par la relation suivante:

- $\boxed{\vec{t}(M,\vec{n})=\vec{t}(M,\overrightarrow{e_1})n_1+\vec{t}(M,\overrightarrow{e_2})n_2+\vec{t}(M,\overrightarrow{e_3})n_3}$

2.3. Tenseurs de contrainte

- Soit la convention d'indice: σ_{ij}

- **1er indice** : le vecteur unitaire de l'axe sur lequel est projetée la contrainte; **2eme indice**: le vecteur unitaire de la normale extérieure a la facette.



- Nous avons 9 composantes pour représente l'état de contrainte a partir de la connaissance des vecteurs contrainte associer a une base orthonormé, on fait apparaitre **le tenseurs de contrainte /de Cauchy** dont les composantes sont notées telles que:

$$
\begin{array}{ccc}
\vec{T}(M,\vec{e_1}) & \vec{T}(M,\vec{e_2}) & \vec{T}(M,\vec{e_3}) \\
\Downarrow & \Downarrow & \Downarrow
\end{array}
$$

$$
\overline{\overline{\sigma}}(M)=\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix}_{(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})}
$$

- le tenseur contrainte $\overline{\overline{\sigma}}$ regroupes les composantes des trois vecteurs contraintes agissant sur les facettes normale aux trois vecteurs de base

- Les indices **j** et **i** de $\boldsymbol{\sigma_{ji}}$ du tenseurs contraintes sont définit comme suit:

j: indice indique le nombre de la facette

i: indice indiquons l'axe de projection du vecteur contrainte

Le vecteur contrainte dépend de la direction de normale a la facette, cela est représenté par la formule Cauchy

$\vec{t}(M,\vec{n}) = [\bar{\bar{\sigma}}(M)]\vec{n}$ c'est produit contracte.

$$\vec{t}(M,\vec{n}) = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}$$

En notation indicielle

$$t_i = \sigma_{ji}.n_j \Leftrightarrow \begin{bmatrix} t_1 = \sigma_{11}n_1 + \sigma_{21}n_2 + \sigma_{31}n_3 \\ t_2 = \sigma_{12}n_1 + \sigma_{21}n_2 + \sigma_{32}n_3 \\ t_3 = \sigma_{13}n_1 + \sigma_{23}n_2 + \sigma_{33}n_3 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{t_i = \sigma_{ji}.n_j} \ \textbf{ ou } \boldsymbol{\vec{t} = \overrightarrow{n^t}\bar{\bar{\sigma}}} \ \textbf{(}\text{la formule Cauchy)}$$

Le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma_{ji}}$ est en générale diffèrent en chaque point d'un milieu contenu, et c'est un outille qui fournit le vecteurde contrainte $\boldsymbol{t_i}$ dans n'importe quelle direction définie par un vecteur normale unitaire **n**, il caractérise donc l' état de contrainte en un point.

2.3. Propriétés du tenseur σ_{ji}-

- Les composantes T sont des fonctions linéaires des composantes σ_{ji}
- Les composante des vecteurs contraintes dans le repère (e_1,e_2,e_3) sont alors exprime par un tenseur d'ordre 2:

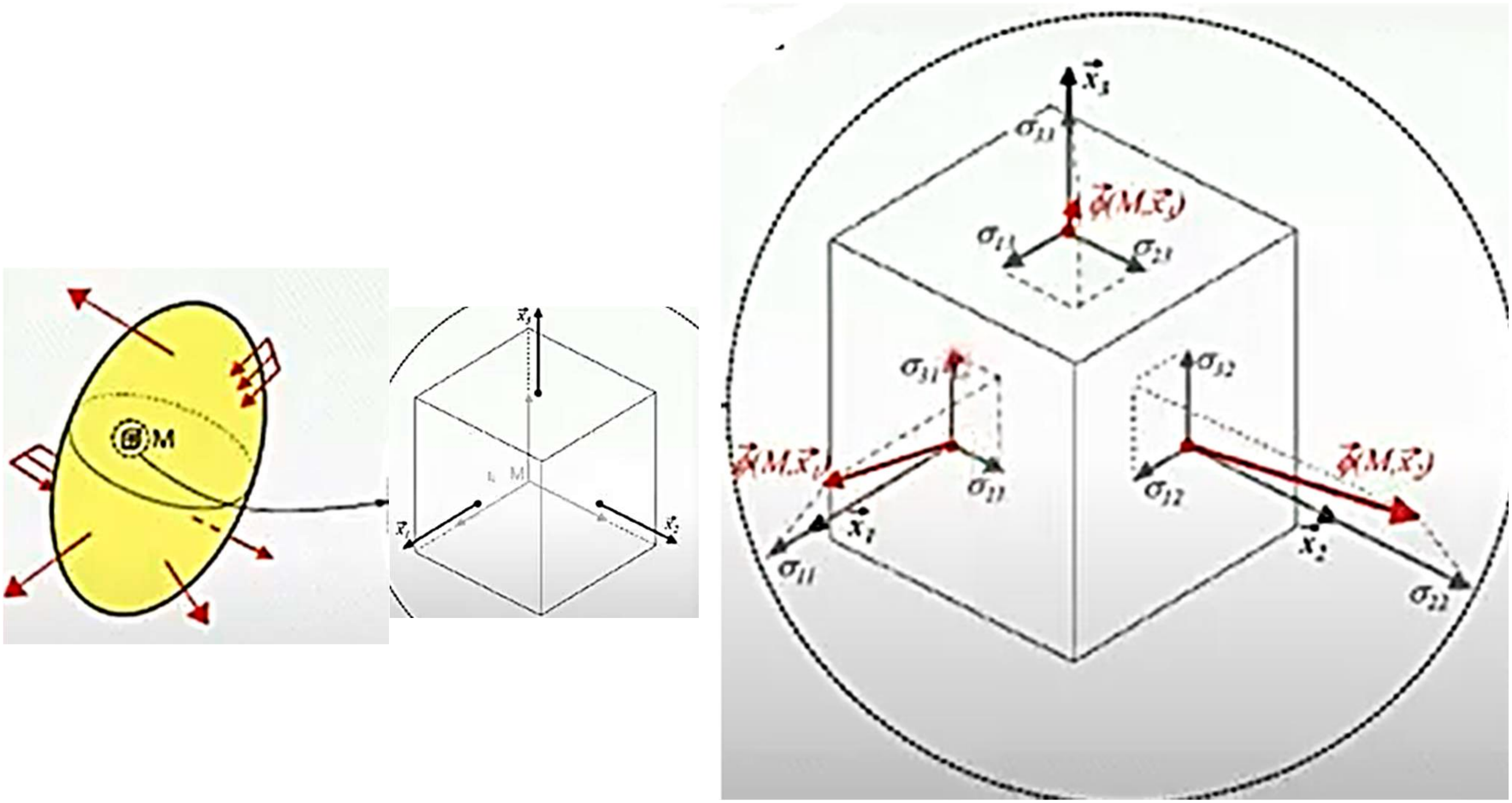
$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} \vec{t}(M,\vec{n_1}) & \vec{t}(M,\vec{n_2}) & \vec{t}(M,\vec{n_3}) \end{array} \\
\begin{array}{c} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{array} &
\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Composantes tangentielles

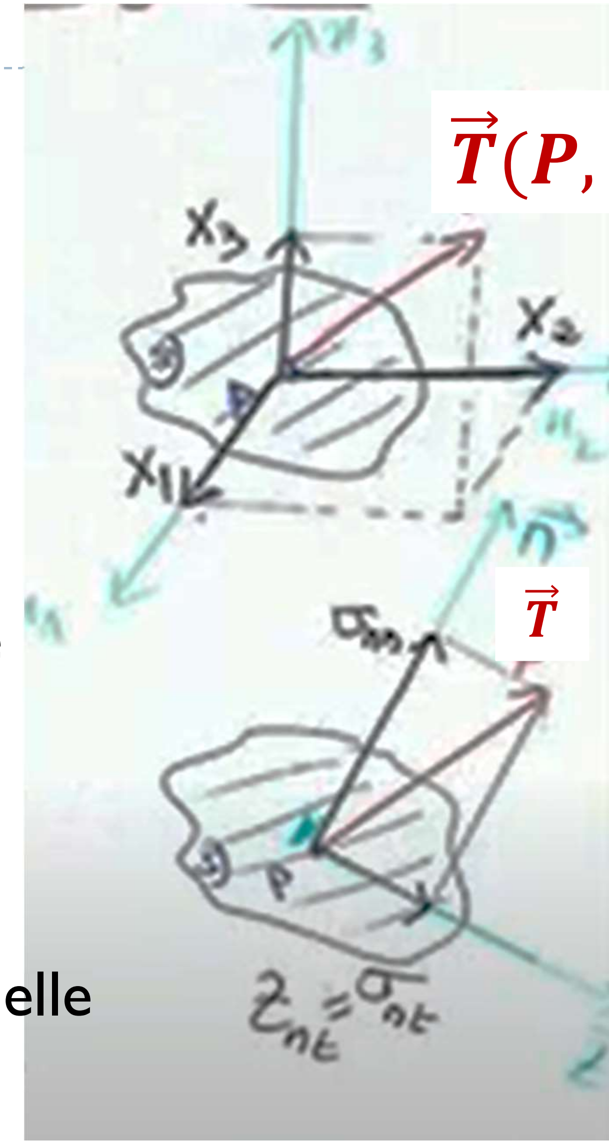
Composantes normales

- Avec: σ_{ji} ***symétrique*** ($\sigma_{ji}=\sigma_{ij}$) toujours
- Si $\sigma_{ji} > 0 \Rightarrow$ contrainte de traction
- Si $\sigma_{ji} < 0 \Rightarrow$ contrainte de compression

2.4. Représentation graphique du tenseur des contraintes



2.5.Calcules des contraintes normales et tangentielle

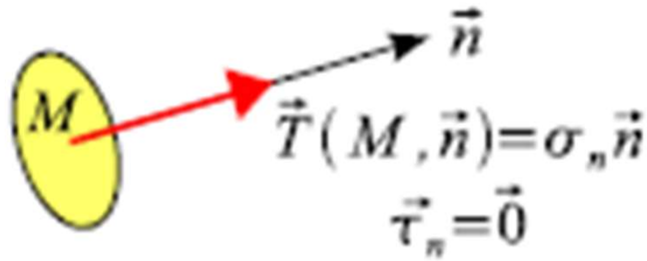


- On projette le vecteur contrainte $\vec{T}$:
- 1/ une fois sur le system d'axe $(\overrightarrow{ox_1}, \overrightarrow{ox_2}, \overrightarrow{ox_3})$
- On obtient ces composantes $\begin{cases} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{cases}$
- 2/et une autre fois sur le system d'axe $(\vec{n}, \vec{\tau})$
- Telque ($\vec{n} \perp S$) et ($\vec{n}$ // S)
- On obtient : σ_{nn} (contrainte normal)
- $\boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{nt}}$ (contrainte tangentielle

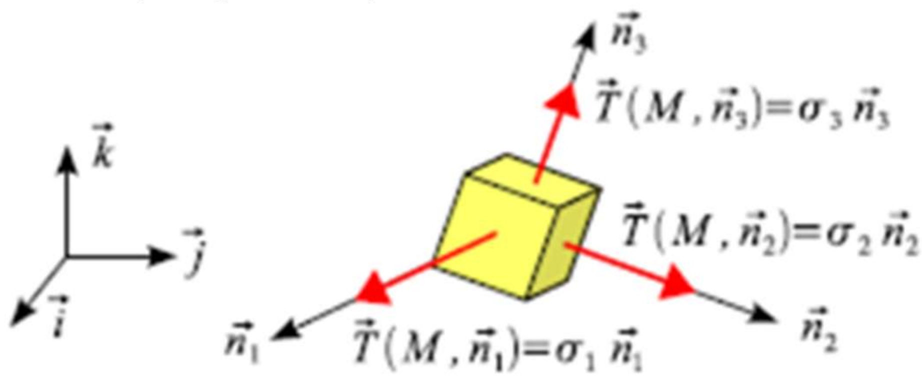
- $\sigma_{nn} = \vec{T}.\vec{n} = T_i n_i = (\sigma_{ij}.n_j)n_i$
- Donc $\sigma_{nn} = T_i n_i$ c'est un scalaire
- $\sigma_{nn} = \sigma_{ij} n_i n_j$
- C'est la composantes un vecteur contrainte T perpendiculaire au plan (S)
- $\boldsymbol{\tau_{nt}} = \vec{T}.\vec{t} = T_i t_i = (\sigma_{ij}.n_j)t_i$
- Donc $\boldsymbol{\tau_{nt}} = T_i t_i$ c'est un scalaire
- $\boldsymbol{\tau_{nt}} = \sigma_{ij} t_i n_j$
- C'est la composantes du vecteur contrainte T parallèle au plan (S)

- Si le tenseur des contraintes est ramené a ses principaux , les contraintes normales et tangentielles devinent:

- $\sigma_{ij} - \lambda\delta_{ij} = 0$ $\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0$



- Les directions n_1, n_2 et n_3 sont les directions principales.



Faces et contraintes principales en M

III.Contraintes principale et invariants

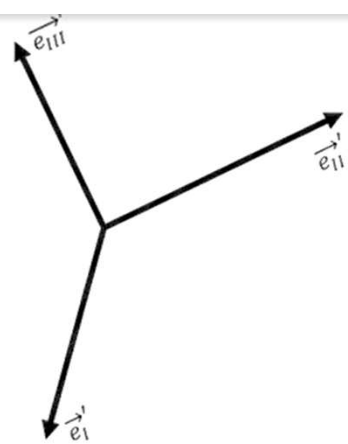
- Pour tout tenseur symétrique d'ordre 2, il existe toujours un repère particulier, le repère principale dans le tenseur des contrainte σ a pour représentation une matrice diagonale dont les composantes sont appelées **contraintes principales** $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$
- $$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$
- Les contraintes principales $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ainsi que le tenseur σ lui-même vérifient l'équation caractéristique:

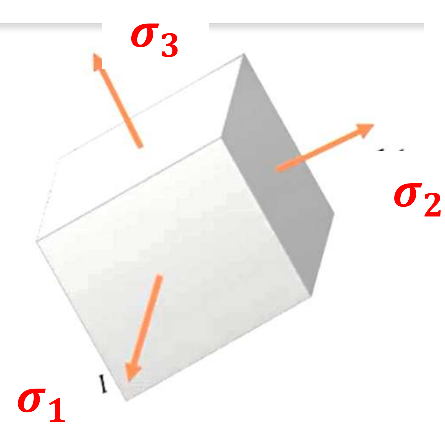
Les contraintes σ_1, σ_2, σ_3 sont appelées **contraintes principales** et les vecteurs unitaires **(e'_{I},e'_{II},e'_{III})** de la base principale sont appelés **directions principales**

Pour calculer les contraintes principales, il est nécessaire de déterminer le polynôme caractéristique $P(\lambda)$ de la matrice du tenseur de contraintes $\overline{\overline{\sigma}}$:

$$P(\lambda) = Det(\overline{\overline{\sigma}} - \lambda\,\overline{\overline{I}}) = |\overline{\overline{\sigma}} - \lambda\,\overline{\overline{I}}| = \begin{vmatrix} \sigma_{11}-\lambda & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22}-\lambda & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33}-\lambda \end{vmatrix}$$

$$P(\lambda) = Det(\overline{\overline{\sigma}} - \lambda\,\overline{\overline{I}}) = |\overline{\overline{\sigma}} - \lambda\,\overline{\overline{I}}| = \lambda^3 - I_1\,\lambda^2 + I_2\,\lambda - I_3$$





I_1, I_2 et I_3 sont les invariants du tenseur de contraintes $\bar{\bar{\sigma}}$.

λ est une valeur propre si et seulement si :

$$Det(\bar{\bar{\sigma}} - \lambda \bar{\bar{I}}) = |\bar{\bar{\sigma}} - \lambda \bar{\bar{I}}| = \lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda - I_3 = 0$$

Afin de déterminer les valeurs propres, on cherche alors, à factoriser le polynôme caractéristique $P(\lambda)$:

$$P(\lambda) = Det(\bar{\bar{\sigma}} - \lambda \bar{\bar{I}}) = (\sigma - \lambda_1)(\sigma - \lambda_2)(\sigma - \lambda_3)$$

Les contraintes principales sont égales aux valeurs propres :

$\sigma_I = \lambda_1$, $\sigma_{II} = \lambda_2$ et $\sigma_{III} = \lambda_3$

La détermination des contraintes principales s'opère selon la nature de la factorisation du polynôme caractéristique.

Les trois contraintes principales sont les racines de l'équation caractéristique :

$$\det\left(\left[\sigma(M)\right] - \sigma_n\left[I\right]\right) = 0 \quad \text{où } \left[I\right] \text{ est la matrice unité de dimension 3}$$

soit

$$\det\begin{bmatrix} \sigma_{xx}-\sigma_n & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy}-\sigma_n & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz}-\sigma_n \end{bmatrix} = -\sigma_n^3 + I_1\,\sigma_n^2 - I_2\,\sigma_n + I_3 = 0$$

Les contraintes principales sont indépendantes du repère $\{x, y, z\}$. I_1, I_2 et I_3 sont des invarian

$$I_1 = \mathrm{tr}\left[\sigma\right] = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\left(\left(\mathrm{tr}\left[\sigma\right]\right)^2 - \mathrm{tr}\left[\sigma\right]^2\right) = \sigma_{xx}\,\sigma_{yy} + \sigma_{xx}\,\sigma_{zz} + \sigma_{yy}\,\sigma_{zz} - \sigma_{xy}^2 - \sigma_{xz}^2 - \sigma_{yz}^2$$

$$= \sigma_1\,\sigma_2 + \sigma_1\,\sigma_3 + \sigma_2\,\sigma_3$$

$$I_3 = \det\left[\sigma\right] = \sigma_{xx}\,\sigma_{yy}\,\sigma_{zz} + 2\,\sigma_{xy}\,\sigma_{xz}\,\sigma_{yz} - \sigma_{xx}\,\sigma_{yz}^2 - \sigma_{yy}\,\sigma_{xz}^2 - \sigma_{zz}\,\sigma_{xy}^2$$

$$= \sigma_1\,\sigma_2\,\sigma_3$$

$$\begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 n_1 \\ \sigma_2 n_2 \\ \sigma_3 n_3 \end{Bmatrix}$$

où n_1, n_2 et n_3 sont les composantes de $\vec{n}$. Compte-tenu de la relation :

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$$

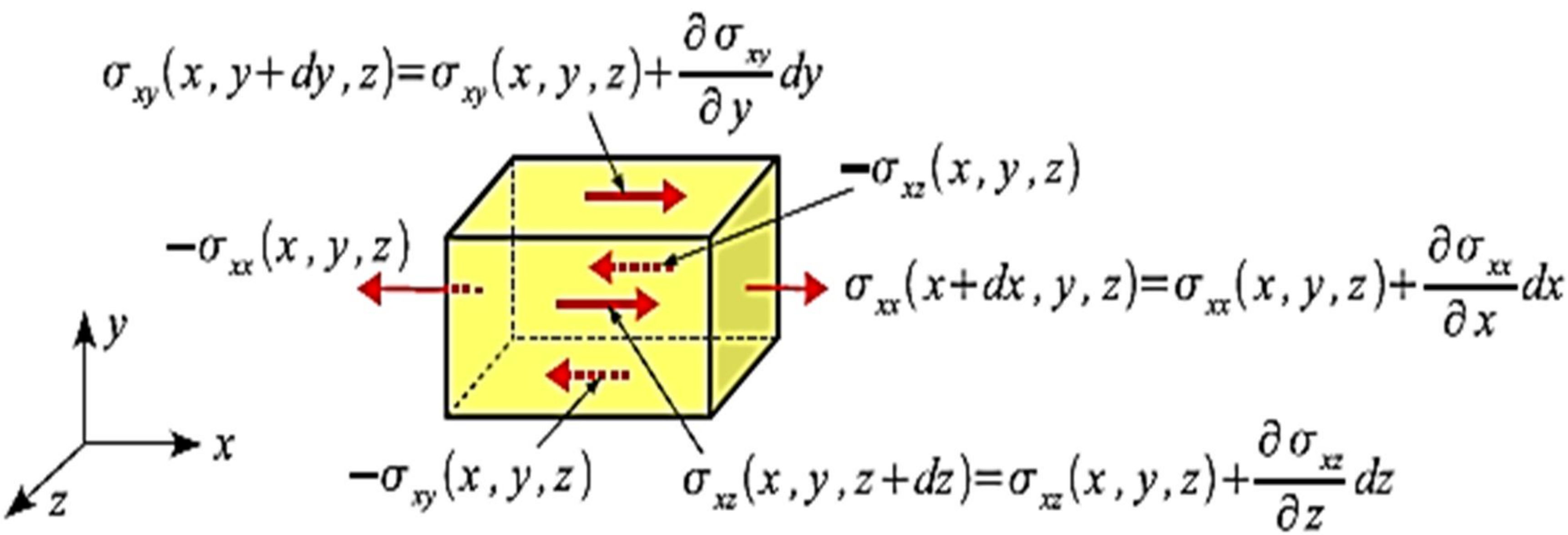
on en déduit :

$$\frac{T_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{T_2^2}{\sigma_2^2} + \frac{T_3^2}{\sigma_3^2} = 1$$

Quand $\vec{n}$ varie, l'extrémité du vecteur $\vec{T}(M, \vec{n})$ se déplace sur l'**ellipsoïde de Lamé** dont les axe sont les directions principales et les demi axes sont σ_1, σ_2 et σ_3.

IV.Equation d'équilibre (Eq. de mouvement)

- Soit $\vec{f}$ la force par unité de volume appliquée au point de coordonnées (*x*; *y*; *z*) du solide.
- Soient $\vec{\gamma}$ l'accélération du point de coordonnées (*x*; *y*; *z*) et ρ la masse volumique du matériau. Un point d'un co



– *Équilibre du parallélépipède suivant x*

- La projection sur l'axe x:

$$\begin{aligned}
&-\sigma_{xx}(x,y,z)\,dy\,dz+\sigma_{xx}(x+dx,y,z)\,dy\,dz\\
&-\sigma_{xy}(x,y,z)\,dx\,dz+\sigma_{xy}(x,y+dy,z)\,dx\,dz\\
&-\sigma_{xz}(x,y,z)\,dx\,dy+\sigma_{xz}(x,y,z+dz)\,dx\,dy+f_x\,dx\,dy\,dz\\
=&\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}\,dV+\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y}\,dV+\frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial z}\,dV+f_x\,dV=\rho\,dV\,\gamma_x
\end{aligned}$$

où $dV=dx\,dy\,dz$. Il vient après simplification :

$$\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial z}+f_x=\rho\,\gamma_x$$

- de même:

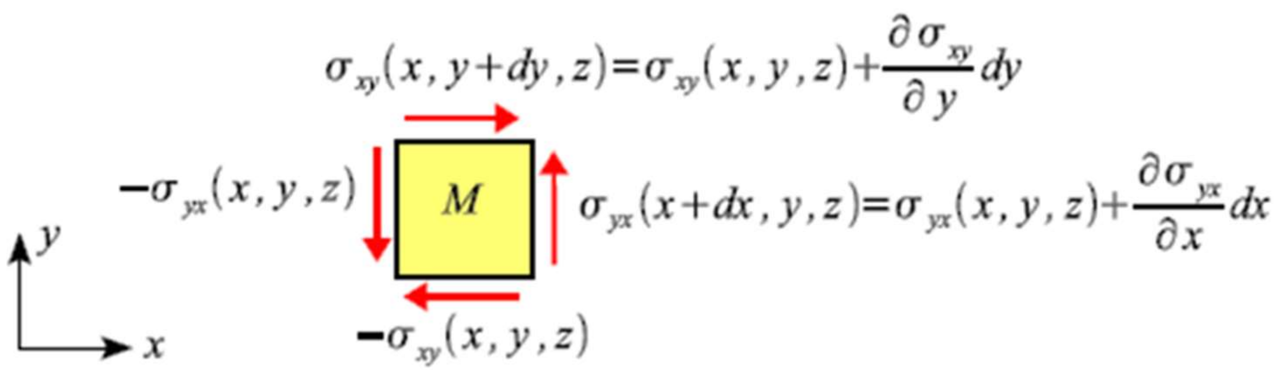
$$\frac{\partial\sigma_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial z}+f_y=\rho\,\gamma_y$$

$$\frac{\partial\sigma_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}+f_z=\rho\,\gamma_z$$

- Et ces les 3 équations d'équilibres

3.1.Equilibres des moments des contraintes

- Ecrivons que la projection sur l'axe z de la somme des moments des forces appliquées au parallélépipède est nulle. Il vient, en en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieurs a 3
- On conserve que les contrainte tangentielle car les contrainte normale n'ont pas un effet de moment.



– *Équilibre du parallélépipède en rotation suivant z*

Ecrivons que la projection sur $\vec{z}$ de la somme des moments des forces appliquées au parallélépipède est nulle. Il vient, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieurs à 3 :

$$\boxed{dx(dydz\sigma_{yx}) - dy(dxdz\sigma_{xy}) = 0}$$

Soit : $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$

de même : $\sigma_{xz} = \sigma_{zx}$ et $\sigma_{yz} = \sigma_{zy}$

- Le tenseur des contraintes est donc symétrique :
- $[\boldsymbol{\sigma}] = [\boldsymbol{\sigma}]^{\boldsymbol{T}}$

- Soient n_a et n_b deux facettes en M. On déduit de l'equation:

$$\vec{n}_a \,.\, \vec{T}(M, \vec{n}_b) = \{n_a\}^{\mathrm{T}} \, [\sigma(M)] \, \{n_b\} = \{n_b\}^{\mathrm{T}} \, [\sigma(M)] \, \{n_a\} = \vec{n}_b \,.\, \vec{T}(M, \vec{n}_a) \qquad \forall \, \vec{n}_a \;,\; \vec{n}_b$$

V.Tenseurs sphérique et Déviatorique

- On peut décomposer le tenseur de contraintes en la somme de deux tenseurs, un premier tenseur sphérique et un second déviatorique. $\boldsymbol{\sigma_{ij} = \sigma . \delta_{ij} + S_{ij}}$
- $\boldsymbol{\sigma}$: la partie sphérique, $\boldsymbol{\sigma = \frac{I}{3} = \frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}}{3} = \frac{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}{3}}$
- Et c'est la contrainte normale moyenne
- Sij : la partie déviatorique du tenseur de contraintes.
- $\boldsymbol{S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk} . \delta_{ij}}$

$$S_{11} = \sigma_{11} - \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = \frac{2\sigma_{11} - \sigma_{22} - \sigma_{33}}{3}$$

$$S_{22} = \sigma_{22} - \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = \frac{2\sigma_{22} - \sigma_{11} - \sigma_{33}}{3}$$

$$S_{33} = \sigma_{33} - \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = \frac{2\sigma_{33} - \sigma_{11} - \sigma_{22}}{3}$$

$$S_{12} = \sigma_{12}$$

$$S_{13} = \sigma_{13}$$

$$S_{23} = \sigma_{23}$$

- L'expression finale du tenseur déviatorique est donnée par la relation suivante :

$$S_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{2\sigma_{11} - \sigma_{22} - \sigma_{33}}{3} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \frac{2\sigma_{22} - \sigma_{11} - \sigma_{33}}{3} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \frac{2\sigma_{33} - \sigma_{11} - \sigma_{22}}{3} \end{bmatrix}$$

- Pour le tenseur déviatorique les invariants sont notés : J_1 ,J_2 ,J_3 et sont définis de la même manière que pour les invariants du tenseur des cc

$$J_1 = \mathrm{trace}(S_{ij}) = S_{11} + S_{22} + S_{33} = S_1 + S_2 + S_3 = 0$$

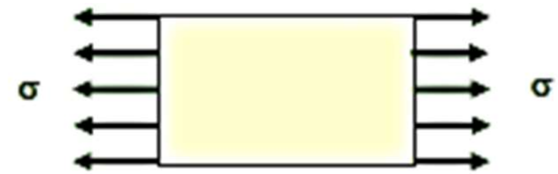
$$J_2 = S_{11}S_{22} + S_{22}S_{33} + S_{11}S_{33} - (S_{12}^2 + S_{23}^2 + S_{13}^2)$$

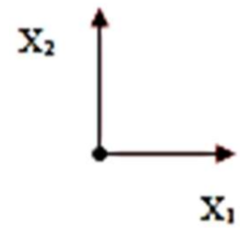
$$J_3 = \det(S_{ij}) = S_1 S_2 S_3$$

- Remarque
- Les invariants sont utilisés en plasticité des solides (Critère de Von Mises).

VI.Tenseur de contraintes particuliers

6.1- Etat de contraintes uni axial (traction ou compression simple)



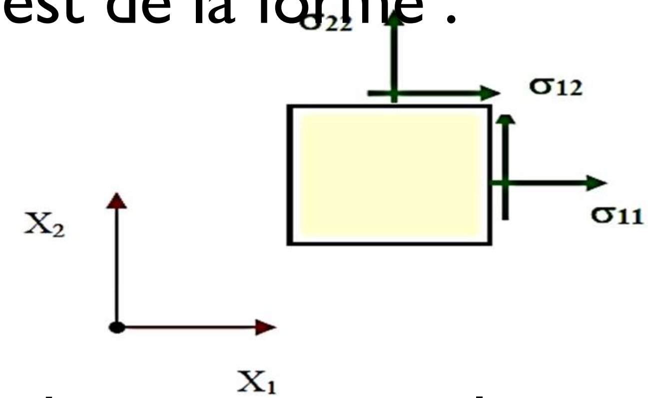


- $\vec{T}(M,\vec{n}) = \sigma\overrightarrow{e_1}$
- L'état de contraintes en un point (M)
- est dit uni axial si le tenseur
- des contraintes s'écrit :
- $\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Cet état de contraintes est appelé état de traction simple si σ est positif et état de compression simple si σ est négatif.

2- Etat plan de contrainte

- En un point (M), l'état de contrainte est plan **(figure)**, si le tenseur des contraintes est de la forme :



- $$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

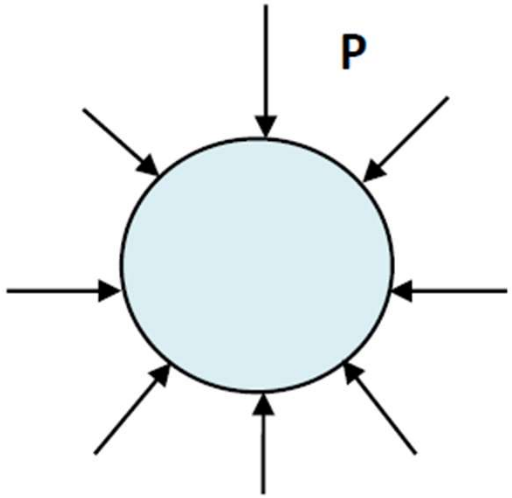
- Dans la figure cet état plan de contraintes , les contraintes évoluent dans le plan $O(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$. Si de plus, nous avons $\sigma_{33} \neq 0$, on parle de pseudo état plan de contraintes.

- $$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

6.2.Etat de contraintes isotrope

- L'état de contraintes en un point (M) est isotrope **(figure),** si quelque soit la facette, nous avons $\vec{T}(M,\vec{n}) = \sigma\vec{n}$
- Donc: **les trois contraintes principales sont égales** et le tenseur de contraintes est de la forme suivante quelque soit le repère :

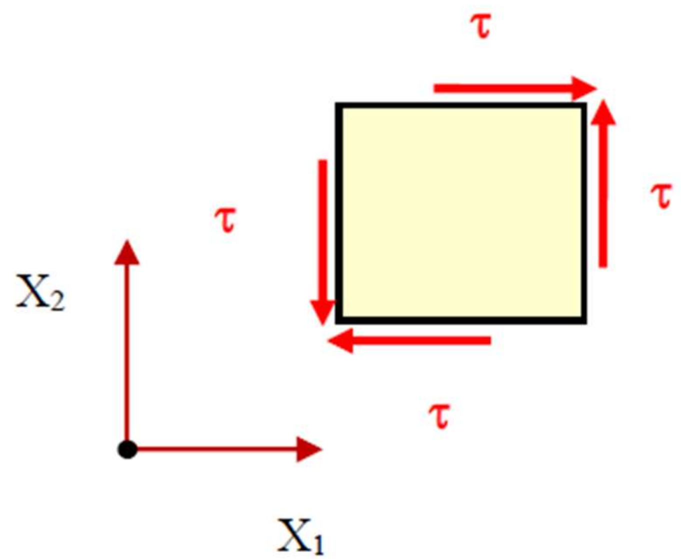
$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix}$$



- Si $\sigma>0$, il s'agit d'une tension
- Si $\sigma<0$ c'est une compression.

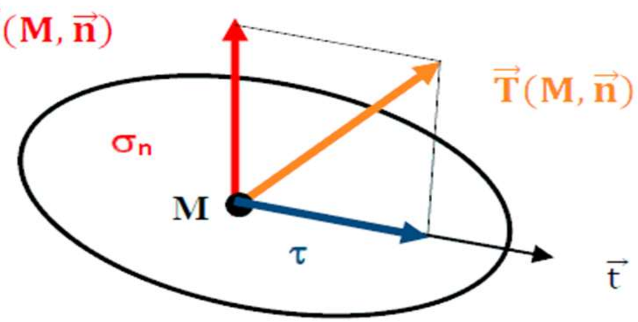
6.3.Etat de cisaillement simple

- Si l'état de contraintes en (M) est un état de cisaillement simple **(figure)** par rapport aux deux directions $\overrightarrow{X_1}$et $\overrightarrow{X_2}$, le tenseur des contraintes se réduit à :
- $\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$



VII. Représentation géométrique des cercles de Mohr

- La représentation de Mohr consiste à représenter l'état de contraintes tridimensionnel, d'un point (P) sur un graphe bidimensionnel appelé **plan de Mohr (**plan des contraintes):
- normales $\boldsymbol{\sigma_N}$ et tangentielles $\boldsymbol{\tau_t}$.
- Les axes de cordonnées choisis sont les axes principaux dont
- les contraintes principales sont des valeurs distinctes prises par convention dans l'ordre $\boldsymbol{\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3}$.
- On prend un point M d'un milieu continu en état de contrainte **(figure)**
- la composante normale: $\sigma_n = \vec{T}$ $\sigma_n = \vec{n}.\vec{T}(M,\vec{n})$



- Considérons un point M du plan principale, ces contrainte principales seront $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ rangées selon $\boldsymbol{\sigma_1} > \boldsymbol{\sigma_2} > \boldsymbol{\sigma_3}$
- On se propose de chercher le lieu géométrique de ce point (M). dans le plan de Mohr $O(\vec{\sigma}_N, \vec{\tau}_t)$.
- $\vec{T} = \vec{\sigma} = \overrightarrow{\sigma_N} + \overrightarrow{\sigma_t} \Longrightarrow |\sigma|^2 = {\sigma_n}^2 + {\tau_t}^2$
- $|\sigma|^2 = \boldsymbol{\sigma_1}^2 l^2 + \boldsymbol{\sigma_2}^2 m^2 + \boldsymbol{\sigma_3}^2 n^2$
- l, m, et n sont appelés **cosinus directeurs** de la facette
- Avec : $\sigma_n = n.\sigma = l^2.\sigma_1 + m^2.\sigma_2 + n^2.\sigma_3$
- $l^2 + m^2 + n^2 = 1$
- Donc: 3 équations a 3 inconnues, nous donnent:

$$\boldsymbol{l^2 = \frac{(\sigma_n - \sigma_2)(\sigma_n - \sigma_3) + \tau_s^2}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)}}$$

$$\boldsymbol{m^2 = \frac{(\sigma_n - \sigma_3)(\sigma_n - \sigma_1) + \tau_s^2}{(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1)}}$$

$$\boldsymbol{n^2 = \frac{(\sigma_n - \sigma_1)(\sigma_n - \sigma_2) + \tau_s^2}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)}}$$

- On peut écrire le numérateur sous la forme : (avec $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$)

$$l^2 = \frac{\left[\sigma_n - \frac{1}{2}(\sigma_2+\sigma_3)\right]^2 + \tau_s^2 - \left[\frac{1}{2}(\sigma_2-\sigma_3)\right]^2}{(\sigma_1-\sigma_2)(\sigma_1-\sigma_3)} \quad \geq \quad \geq$$

$$m^2 = \frac{\left[\sigma_n - \frac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_3)\right]^2 + \tau_s^2 - \left[\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_3)\right]^2}{(\sigma_2-\sigma_3)(\sigma_2-\sigma_1)} \quad \leq \quad \leq$$

$$n^2 = \frac{\left[\sigma_n - \frac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_2)\right]^2 + \tau_s^2 - \left[\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_2)\right]^2}{(\sigma_3-\sigma_1)(\sigma_3-\sigma_2)} \quad \geq \quad \geq$$

- On remarque que les numérateurs représentent **les équations de cercles** dans le plan (σ_n, τ_t). Puisque $\boldsymbol{\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3}$

$$\left[\sigma_n - \frac{1}{2}(\sigma_2+\sigma_3)\right]^2 + \tau_s^2 \geq \left[\frac{1}{2}(\sigma_2-\sigma_3)\right]^2$$

$$\left[\sigma_n - \frac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_3)\right]^2 + \tau_s^2 \leq \left[\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_3)\right]^2$$

$$\left[\sigma_n - \frac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_2)\right]^2 + \tau_s^2 \geq \left[\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_2)\right]^2$$

- Les cercles ont pour centre et rayons respectivement:

$\left[\frac{1}{2}(\sigma_2+\sigma_3)\right]$	$;\left[\frac{1}{2}(\sigma_2-\sigma_3)\right]$
$\left[\frac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_3)\right]$	$;\left[\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_3)\right]$
$\left[\frac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_2)\right]$	$;\left[\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_2)\right]$