Chapitre 4: **Les ondes**

1. Généralité sur les ondes
2. Propagation des ondes
3. Réflexion des ondes
4. Les ondes stationnaires

1. Généralité sur les ondes

1.1. Définition d'une onde

Une onde est la propagation d'une perturbation produisant sur son passage une variation réversible des propriétés physiques locales. Elle transporte de l'énergie sans transporter de matière.

Exemple: Jeter un caillou dans une étendue d'eau provoque une modification locale du niveau d'eau et engendre une perturbation qui se propage.

1.2. Les différentes sortes d'ondes

Ondes qui ont besoin d'un support matériel: met en jeux une grandeur mécanique

Exemple :

- Oscillation de l'extrémité d'une corde se propagera le long de la corde
- signaux sonores se propagent dans l'air

Ondes qui n'ont pas besoin d'un support matériel: met en jeux le champ électromagnétique

Exemple :

- Ondes électromagnétiques qui se propagent dans l'air comme dans le vide

Onde longitudinale: (u // v)

Exemple : Ressort à boudin (Si on comprime deux spires, on voit se former après les avoir libérées, une onde de compression des spires qui se propage suivant la droite que constitue l'axe de symétrie du ressort)

l'onde est transversale: ($u \perp v$)

Exemple : Corde (Si on agite l'extrémité d'une corde très longue, le mouvement de la corde se fait verticalement alors que l'onde se propage horizontalement)

Onde de cisaillement: ($u \perp v$ et la direction de u n'est pas constante)

Exemple : torsion dans une barre

u *vecteur unitaire dans la direction du déplacement de l'énergie et* ***v*** *la vitesse de l'onde*

Onde à 1 dimension : Ex : corde / ressort

Onde à 2 dimensions : Ex : Ondes de surface

Onde à 3 dimensions : Ex : Ondes Sphérique

A grande distance de la source, le rayon de courbure de la sphère R est tel que :

$R \gg \lambda$. => Surface d'onde $\approx$ plan d'onde => Onde plane

1.2. La Célérité de l'onde

La Célérité (vitesse) de l'onde est: $c = d / (t_2 - t_1)$

Exemple :

Vitesse des ondes sonores dans l'air à 15 °C et 1 Bar : 340 m s^{-1}

Vitesse des ondes mécaniques longitudinales dans l'acier : 3200 m s^{-1}

Vitesse des ondes électromagnétiques dans le vide : $3 \cdot 10^8$ m s^{-1}

Vitesse des ondes électromagnétiques dans un câble coaxial : $2 \cdot 10^8$ m s^{-1}

- Pour une onde matérielle, plus le milieu est rigide, plus la vitesse est grande.

Plus l'inertie du milieu est grande, plus la vitesse diminue.

- Pour une onde électromagnétique, la vitesse de propagation sera généralement d'autant plus grande que le milieu est dilué. (voir l'indice de réfraction $n = C_{vide}/V$)

1.3. Onde progressive périodique

Au lieu de jeter un seul petit caillou dans l'eau, on recommence à intervalle de temps régulier appelé période **T**.

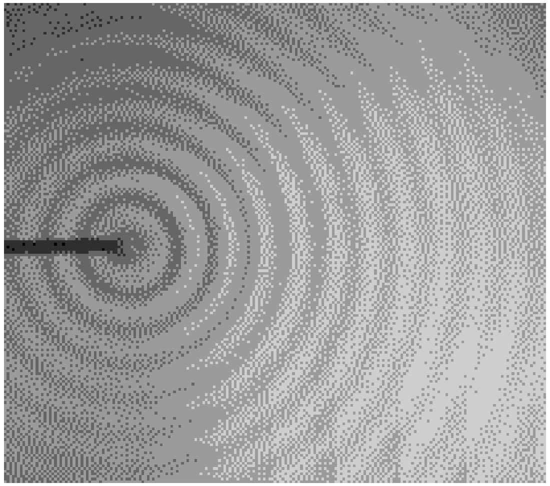
Au lieu d'avoir une perturbation unique (onde circulaire) qui se propage, on obtient des vagues successives. Une photo à un instant donné de la surface de l'eau montre des cercles concentriques correspondant chacun au jet d'un caillou.

L'intervalle de temps entre deux excitations est T.

L'onde se propage à la vitesse v,

La distance parcourue par l'onde pendant T est appelée longueur d'onde λ.

Elle apparaît encore comme la distance entre deux creux sur la photo.



On a : $\lambda = v\,T$

On prend une photo du milieu à un moment donné :

- La hauteur de l’eau dans une direction donnée varie de façon périodique (ici presque sinusoïdalement) en fonction de la position.
- On a donc une périodicité spatiale. La distance entre deux maxima (ou minima) est la période spatiale encore appelée longueur d’onde O.

On se place en un point donné :

- La hauteur de l’eau décrit une oscillation sinusoïdale au cours du temps.
- Sa période correspond à la période T de l’excitation. C’est une période temporelle.

Ainsi une onde progressive périodique est caractérisée par une double périodicité :

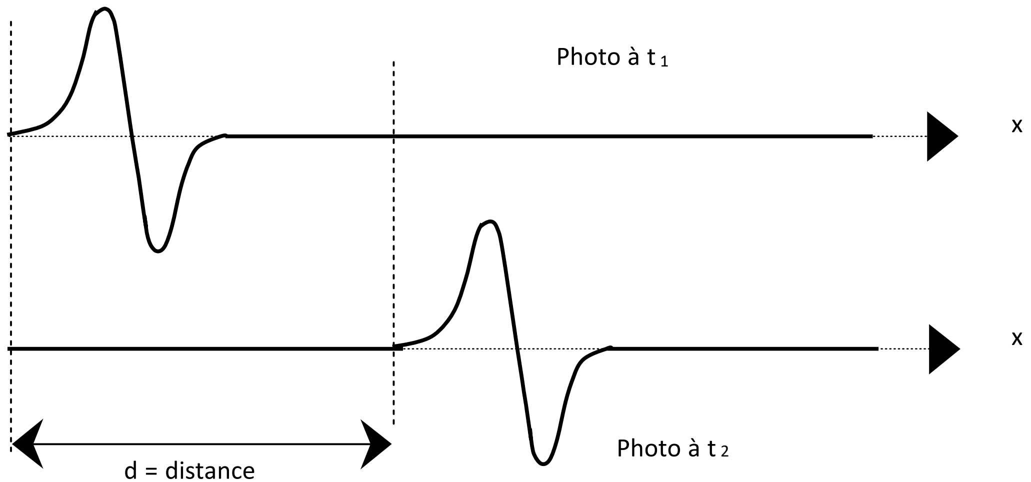
- Période spatiale l en m
- Période temporelle T en s.

2. Propagation des ondes

On considère une corde sans raideur, infiniment longue de masse linéique μ.

Un opérateur (émetteur) positionné à l'extrémité gauche de la corde, donc au point d'abscisse $x = 0$, agite la corde selon un mouvement de faible amplitude.

Les photos de la corde à deux instants t_1 et t_2 montrent que la perturbation engendrée se propage.



c : Célérité de l'onde

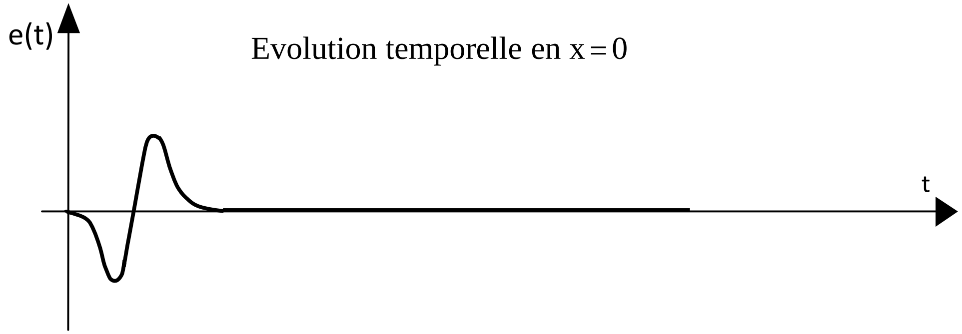
$$d = c \cdot (t_2 - t_1)$$

2.1. Propagation d'une déformation

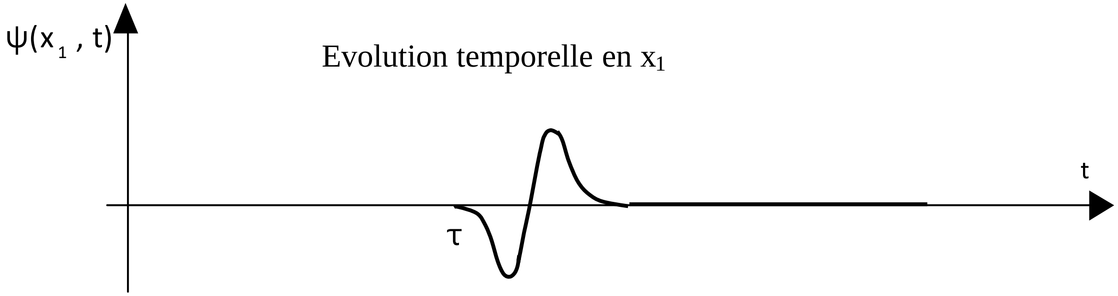
Quel a été le mouvement de l'émetteur en $x = 0$?

Attention : Il s'agit de donner le chronogramme au point d'abscisse $x = 0$!

Au vu de la photo de la corde, l'émetteur a d'abord agité la corde vers le bas puis vers le haut pour ensuite revenir en position initiale.



De même le chronogramme d'un point d'abscisse x_1 de la corde donnera :



Durée pour que la déformation apparaisse :

$\tau = x_1 / c$

Pour décrire la perturbation, il faut trouver une fonction définie en tout point x et à chaque instant t. C'est forcément une fonction de deux variable x et t. On peut écrire que

$$\psi\ (x_1\ , t\ )\ =\ e\ (t - \tau)\ =\ e\ (\ t - x_1/c\ )$$

Généralisation onde progressive

En tout point x, une onde progressive peut être décrite par une fonction y(x,t) définie par :

$$\psi\ (x,t)\ =\ e\ (t - x/c)$$

Propagation en sens inverse

Il suffit de remplacer c par –c …

On obtient ainsi pour une propagation dans le sens des x négatifs :

$$\psi\ (x,t)\ =\ s\ (t + x/c)$$

Propagation dans les deux sens

$$\psi\ (x,t) = e\ (t - x/c) + s\ (t + x/c\ )$$

2.2. Equation de d'Alembert

Il s'agit de trouver l'équation différentielle dont y est la solution

$$\partial\psi/\partial t = e'(t - x/c) + s'(t + x/c)$$

$$\partial^2\psi/\partial t^2 = \underbrace{e''(t - x/c) + s''(t + x/c)}$$

$$\partial\psi/\partial x = (-1/c)\, e'(t - x/c) + (1/c)\, s'(t + x/c)$$

$$\partial^2\psi/\partial x^2 = (1/c^2)\, e''(t - x/c) + (1/c^2)\, s''(t + x/c)$$

$$= (1/c^2)\, [\underbrace{e''(t - x/c) + s''(t + x/c)}]$$

$$\longrightarrow \quad \partial^2 y/\partial x^2 = (1/c\ 2)\, \partial\ ^2\psi/\partial\ t\ ^2$$

$$\boxed{\boldsymbol{\partial\ 2y/\partial t^2 - c^2\, \partial\ ^2\psi/\partial x^2 = 0}} \longrightarrow$$

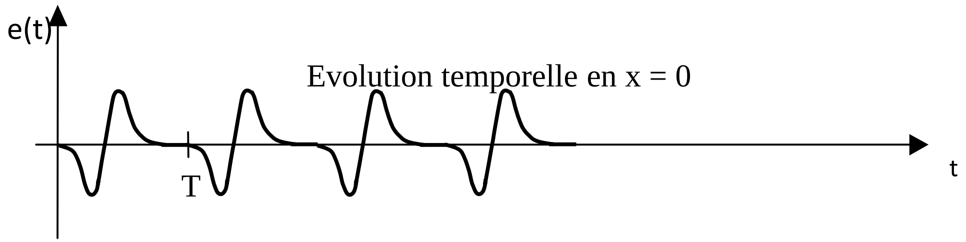
Equation de d'Alembert
Equation de propagation

Cette équation décrit le phénomène de propagation d'une onde dans une direction x donnée. c est la vitesse de propagation de cette onde, appelée vitesse de phase exprimée en m s^{-1} . La solution générale de l'équation de d'Alembert est la superposition de deux ondes progressives se propageant en sens opposés à la même vitesse c.

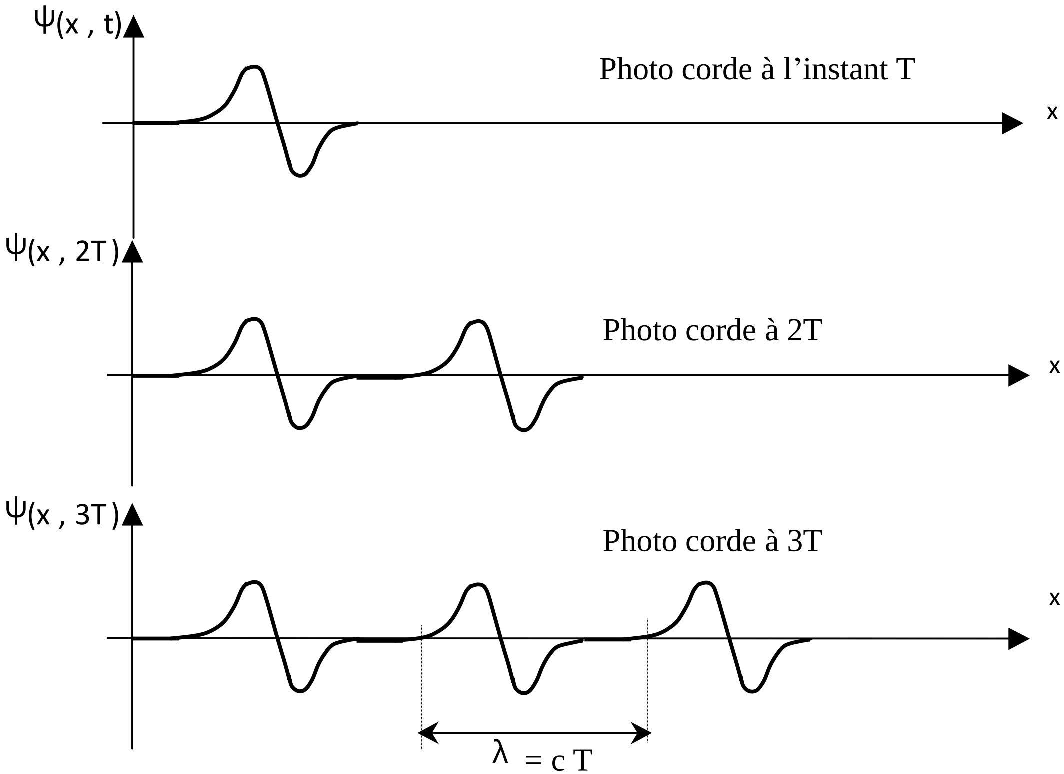
$$\psi\ (x,t) = e\ (t - x/c) + s\ (t + x/c\ )$$

2.3. Propagation d'une déformation périodique

L'extrémité gauche de la corde est agitée à la période T.

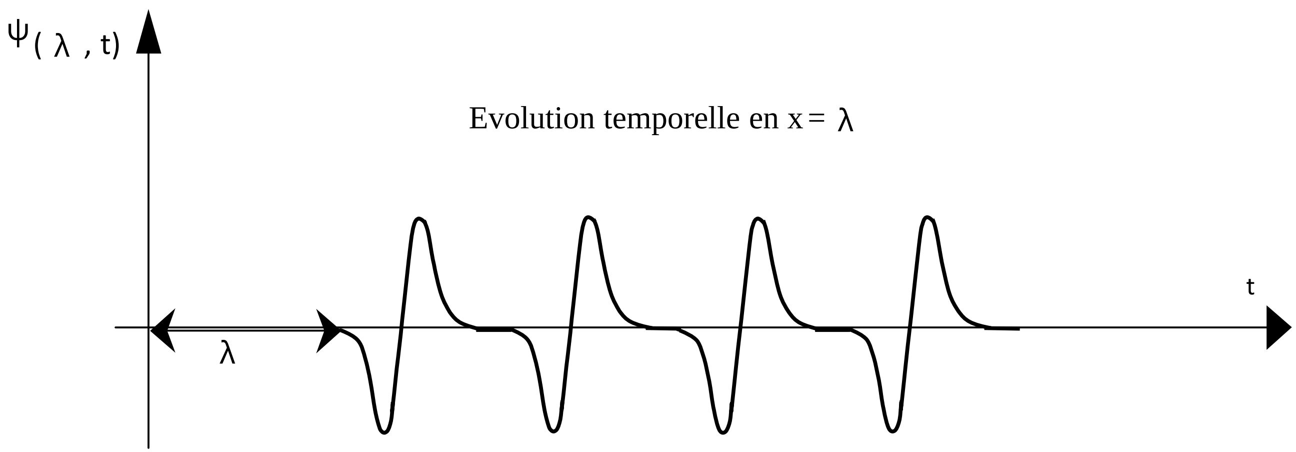


On représente la corde à différents instants:



Si l’excitation est périodique, alors la perturbation le long de la corde est périodique.

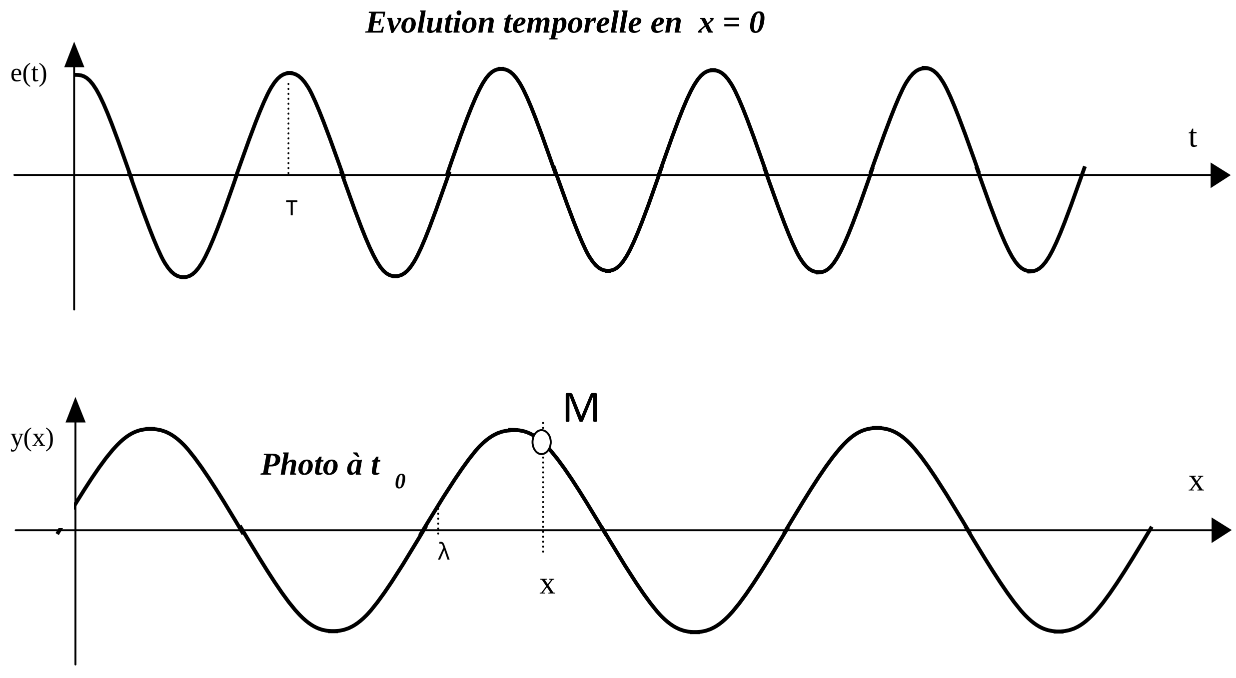
La période spatiale est la longueur d’onde, reliée à la période temporelle de l’excitation par : $\lambda = cT$.



2.4. Onde progressive sinusoïdale

L’extrémité d’une corde infiniment longue est reliée à un vibreur qui engendre une onde progressive sinusoïdale se propageant le long de la corde.

La corde étant infiniment longue, il n’y a pas de réflexion à son extrémité.



Ces deux graphiques montrent de nouveau la double périodicité spatiale et temporelle.

Expression instantanée de l'onde

La perturbation créée à la source est sinusoïdale.

Elle s'écrit donc : $e(t) = A \cos \omega t$.

Soit un point M de la corde situé à l'abscisse x

M reproduit le même mouvement que l'origine de la corde avec un retard $t = x/c$.

Ainsi : $\psi(x,t) = A \cos[\,\omega(t-t)\,] = A \cos[\,\omega(t - x/c)\,]$

Posons $k = \omega/c = 2\pi/(T\,c) = 2\pi/\lambda$

On remarque que k joue le même rôle pour la période spatiale que la pulsation w pour la période temporelle. k est appelé nombre d'ondes.

On a alors :

$$\psi(x,t) = A \cos[\,\omega t - kx\,] \qquad \omega = 2\pi/T \quad \text{et} \quad k = 2\pi/\lambda$$

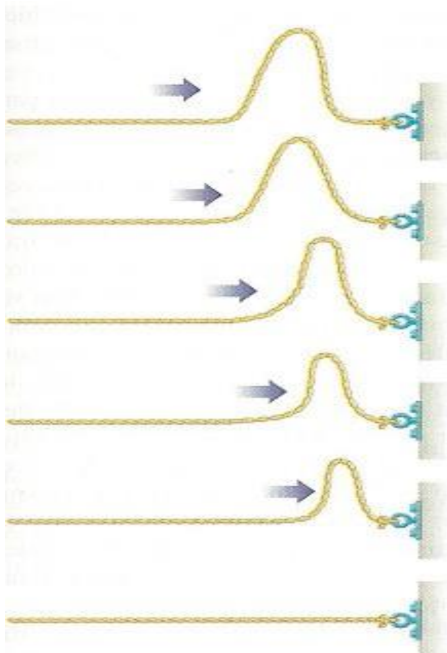
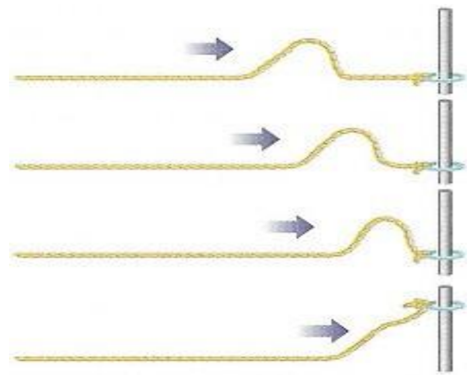
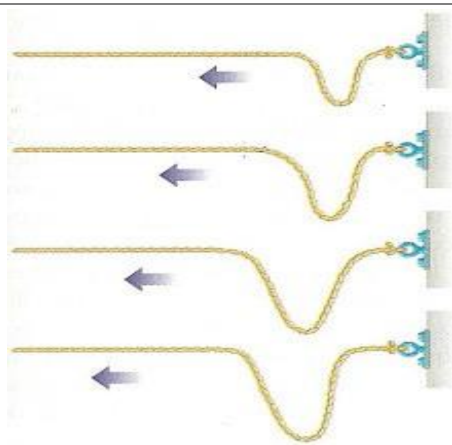
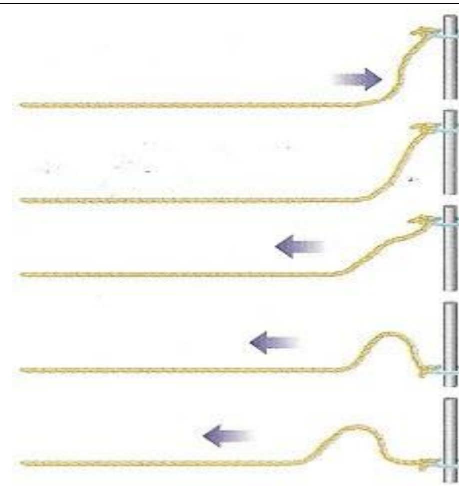
$$\psi(x,t) = A \exp[\,j(\omega t - kx)\,]$$

3: **Réflexion des ondes**

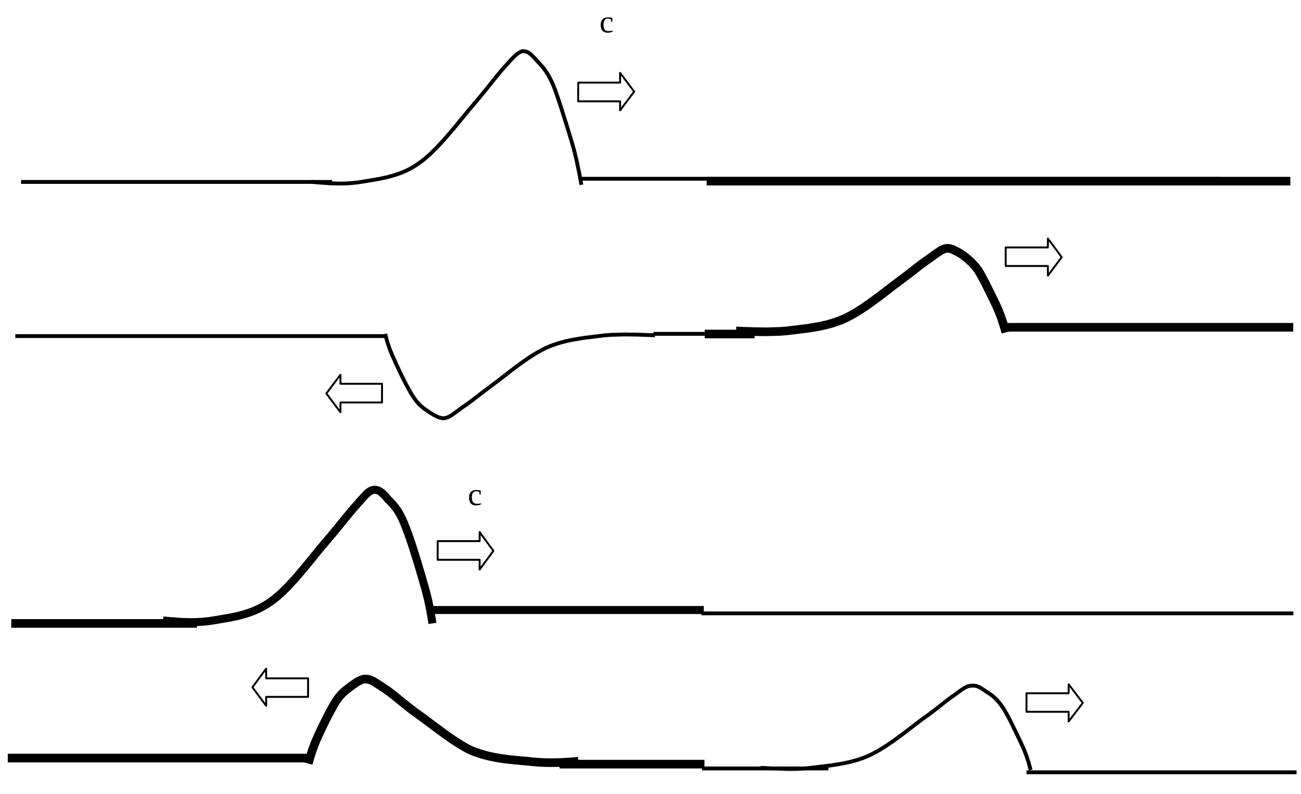
3.1. Réflexion d'une déformation

On considère une onde progressive se propageant de gauche à droite le long d'une corde. L'extrémité droite de la corde est attachée à un obstacle. Le point b est donc immobile.

Extrémité attachée	Extrémité libre
En arrivant à cette extrémité, l'impulsion exerce une force verticale sur le point d'ancrage. Celui-ci exerce, par réaction, une force opposée sur la corde. Cette force renverse l'onde réfléchie par rapport à l'onde incidente. **Onde réfléchie opposée à l'onde incidente,**	Cette extrémité monte poussée vers le haut par l'énergie de l'onde. Cette énergie n'étant pas nulle quand l'extrémité libre atteint la hauteur de la déformation, la corde continue de se déplacer. L'extrémité libre exerce alors une force sur la corde et produit l'onde réfléchie de même forme que l'onde incidente. Le déplacement vertical maximum est le double de la hauteur de crête incidente. **L'onde réfléchie reste dans le même sens.**
L'onde réfléchie se propage à la même vitesse que l'onde incidente.	L'onde réfléchie se propage à la même vitesse que l'onde incidente.
Pour une onde périodique sinusoïdale Changement de phase de 180 °	Pour une onde périodique sinusoïdale Pas de changement de phase

Extrémité attachée	Extrémité libre
	
	

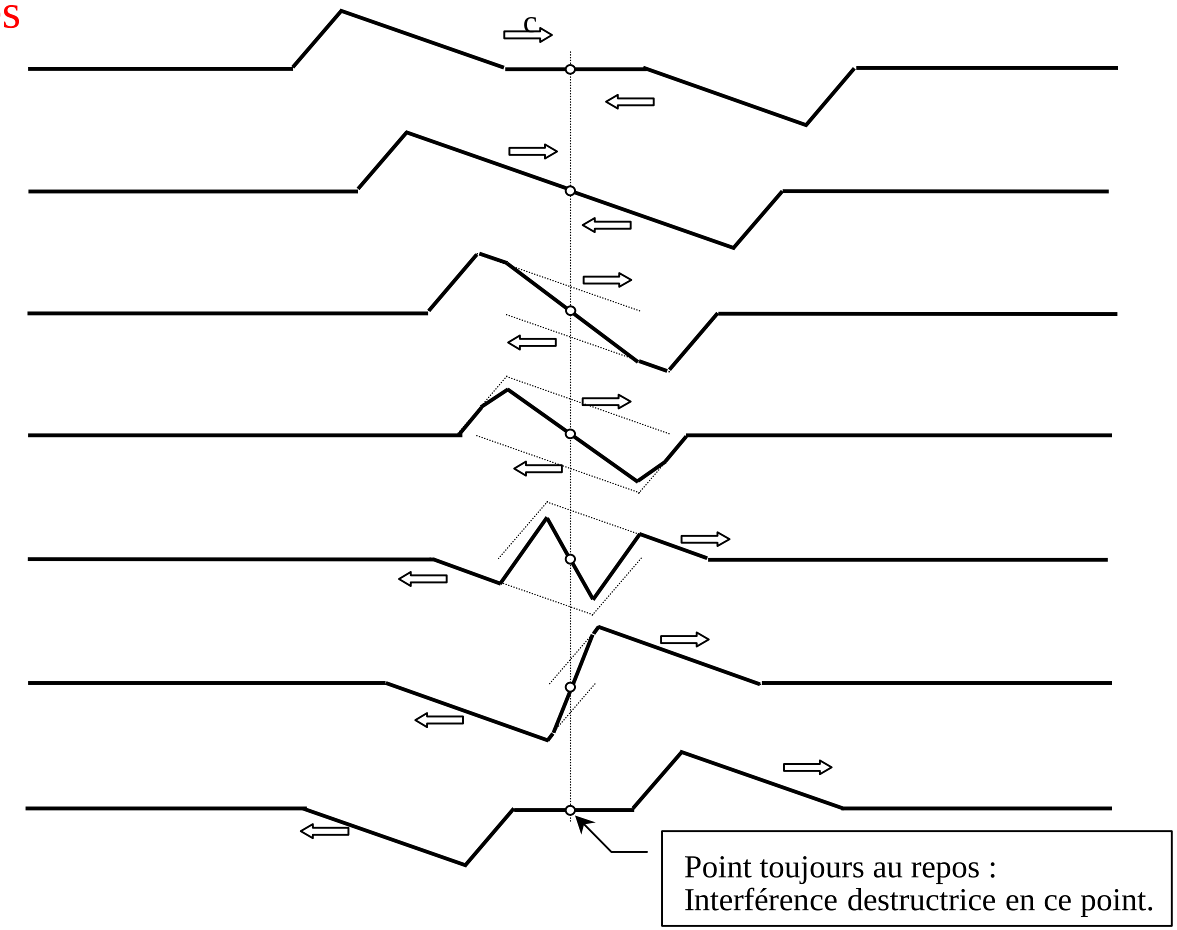
Cas de la réflexion partielle : lorsque l'onde rencontre une section de corde plus lourde, une partie de l'onde incidente est transmise alors que l'autre partie est réfléchie avec inversion du signe de la perturbation. Si la deuxième portion est moins lourde, l'onde réfléchie ne subit pas ce changement de signe.



3.2. Interférence entre deux ondes en sens inversé

On considère deux ondes progressives se propageant en sens inverses le long d'une corde.
Les perturbations considérées sont de faible amplitude.

Ondes opposées



4: **ondes stationnaires**

4.1. Déformations périodiques opposées progressant en sens inverse

On considère deux ondes périodiques progressant en sens inverse, de même amplitude et de même longueur d'onde. Il existe des points où les ondes interfèrent de façon destructrice. Ces points sont toujours au repos et appelés nœuds de vibration.

Soit $\psi 1(x,t)$ la déformation se propageant de gauche à droite (x croissant)

$$\psi_1(x,t) = A \cos(\omega t - kx)$$

Soit $\psi 2(x,t)$ la déformation se propageant de droite à gauche (x décroissant)

$$\psi_2(x,t) = - A \cos(\omega t + kx)$$

La déformation résultante en un point x le long de la corde sera :

$$\psi(x,t) = \psi_1(x,t) + \psi_2(x,t)$$

$$= A [\cos(\omega t - kx) - \cos(\omega t + kx)]$$

$$= - 2 A \sin(kx) \sin(\omega t)$$

Distance entre deux nœuds :

Si $kx = n\pi$

$\Rightarrow \sin(kx) = 0$

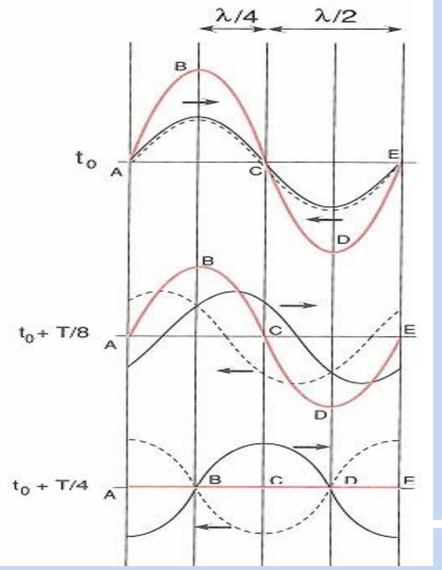
$\Rightarrow \psi$ est nulle à chaque instant

$\Rightarrow$nœud de vibration

$2\pi x/\lambda = n\pi$

$\Rightarrow x = n\lambda/2$

$\Rightarrow$ Les nœuds sont distants de $\lambda/2$



Position des ventres :

Si $kx = \pi/2 + n\pi$

$\Rightarrow \sin(kx) = + - 1$

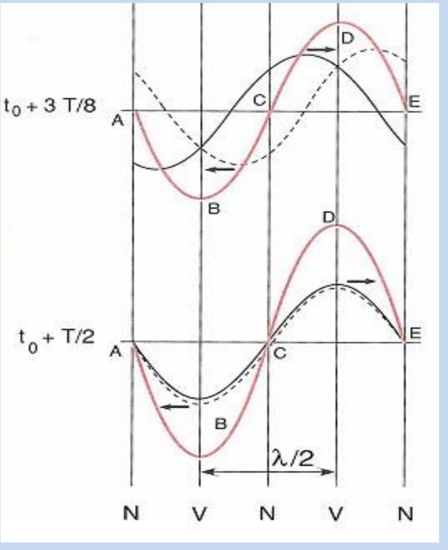
$\Rightarrow$amplitude de ψ maximale

$\Rightarrow$ventre de vibration

$2\pi x/\lambda = \pi/2 + n\pi$

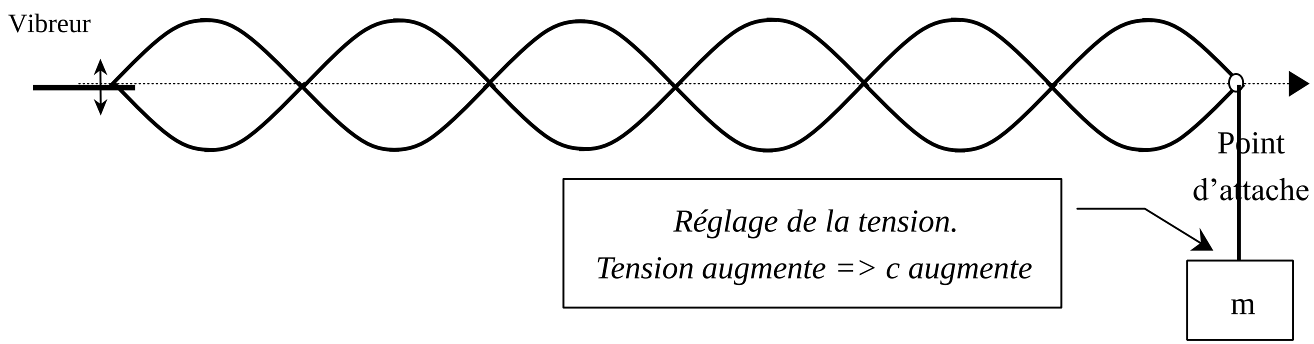
$\Rightarrow x = \lambda/4 + n\lambda/2$

$\Rightarrow$Les ventres sont distants de $\lambda/2$



4.2. Ondes stationnaires

La corde de longueur L est maintenant fixée à ses deux extrémités. Un vibreur agite transversalement l'extrémité gauche de la corde.



Le point d'attache engendre la réflexion de l'onde.

La superposition de l'onde incidente et de l'onde réfléchie de même fréquence et de même amplitude, peut engendrer dans certain cas l'apparition de nœuds et ventres de vibration.

L'onde apparaît alors immobile, on parle d'ondes stationnaires.

Les extrémités attachées imposent les conditions aux limites :

$$\psi(0,t) = 0 \quad \text{et} \quad \psi(L,t) = 0$$

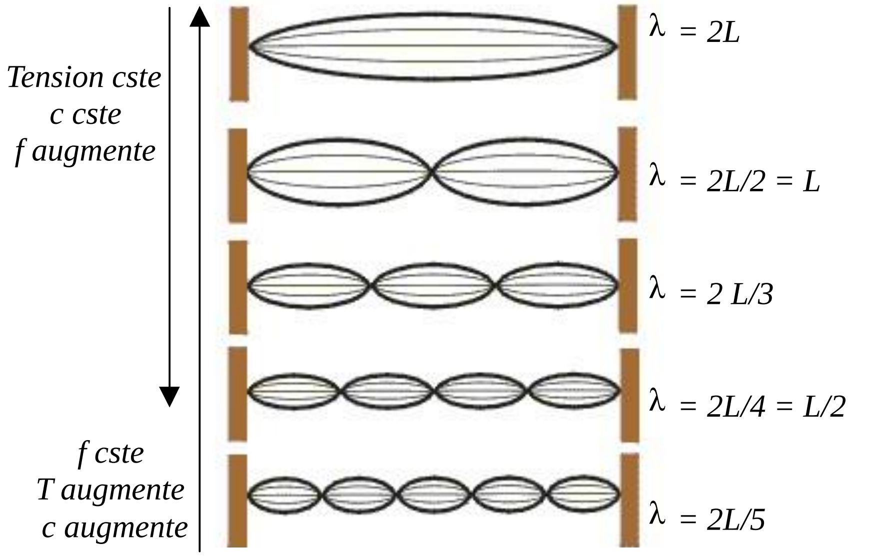
$$\psi(L,t) = 0 = 2A \sin(kL) = 0$$

$$kL = n\pi$$

$$2\pi L / \lambda = n\pi$$

or $\lambda = c/f$ donc : $\lambda = 2L / n$

$$f = n c / 2L$$



Modes de vibration d'une corde tendue

Cette relation montre que:

Les ondes stationnaires n'apparaissent que :

- pour les longueurs d'ondes divisant 2L.

- pour les fréquences multiples de c/2L

Pour une tension de corde donnée, la variation de f fera apparaître successivement les différents modes.

Pour une fréquence donnée, la variation de la tension de la corde fera apparaître les différents modes.

4.3. Ondes stationnaire et résonance

En réalité, compte tenu des réflexions multiples, l'amplitude de vibration des ventres est supérieure à 2A.

Lors de l'apparition du phénomène d'ondes stationnaires, il apparaît un mouvement de grande amplitude correspondant à un phénomène de résonance:

La corde excitée à une fréquence nc/2L entre en résonance et produit des ondes stationnaires.

$f_n = n\ c/2L$ constituent les fréquences propres de la corde.

Les fréquences propres de la corde f_n ne dépendent que de ses caractéristiques : longueur, tension, masse linéique.

Les différentes fréquences propres de la corde font penser à la série de Fourier, pour cette raison, le premier mode de vibration en onde stationnaire $f_1 = c/2L$ constitue le fondamental. Les fréquences propres multiples sont les harmoniques propres de la corde.

Le signal d’excitation peut être décomposé en série de Fourier.

Si la fréquence f du fondamental du signal d’excitation correspond à une fréquence propre de la corde, prenons pour simplifier son fondamental : $f = c/2L$ => Onde stationnaire, résonance sur le premier mode

Mais l’harmonique 2 de l’excitation : $2f = 2\,c/2L$ => Apparition du deuxième mode avec une amplitude plus faible du fait de la décroissance de l’amplitude de l’excitation.

Idem pour les harmoniques suivants de l’excitation.