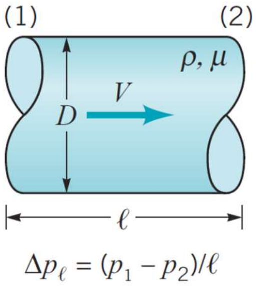
4. تحليل الوحدات أو الأبعاد

الغرض من تحليل الأبعاد أو الوحدات هو تحديد وتقليل المتغيرات التي تؤثر على ظاهرة فيزيائية. نأخذ على سبيل المثال حالة القناة ونبحث عن انخفاض الضغط عن طريق تحليل الأبعاد.

ليكن التدفق المستقر غير القابل للضغط لسائل نيوتني ذو لزوجة μ وكتلة حجمية ρ يسيل بسرعة v عبر أنبوب أملس بطول l وقطر D. نريد إيجاد انخفاض الضغط ΔP في الأنبوب بدلالة متغيرات التدفق الأخرى. للقيام بذلك نستخدم نظرية باكنغهام-Buckingham- أو نظرية π.



<u>نظرية باكنغهام بي (π).</u>

تنص النظرية على أنه "إذا كانت المعادلة التي تتطلب k متغيرات متجانسة الأبعاد، فيمكن اختزالها إلى علاقة k - r حدود لا أبعاد لها، حيث r هو الحد الأدنى لعدد الأبعاد اللازمة لوصف جميع المتغيرات". يتم الإشارة إلى الحدود بعبارة "الحدود π_i".

لتكن معادلة فيزيائية بعدد k من متغيرات، نكتب:

$$\boldsymbol{u_1 = f(u_1, u_2, u_3, \ldots, u_k)}$$

وفقًا لنظرية Pi ، يمكن إعادة صياغة المعادلة على النحو التالي:

$$\pi_1 = \phi(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_{k-r})$$

مع ϕ دالة لكل من $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_{k-r}$ ، يتم ايجاد الحدود π_i في الخطوات التالية:

<u>الخطوة 1:</u> كتابة كل المتغيرات المؤثرة في الظاهرة الفيزيائية. يشترط ان تكون هذه المتغيرات مستقلة عن بعضها البعض، أي انه لا يمكن اخذ متغيرين مشتقين من بعضهما مثل الثقل الحجمي والكتلة الحجمية، في الحالة المدروسة لدينا:

μ ، ρ، v ، D و نبحث عن ΔP_l.

<u>الخطوة 2:</u> نختار نظام الوحدات الذي سنستخدمه. يوجد نظام القوة، الطول و الزمن FLT أو الكتلة، الطول و الزمن MLT. بعدها نكتب وحدات المتغيرات التي احصيناها في الخطوة الأولى في النظام المختار. في حالتنا نختارMLT و نكتب الوحدات لكل متغير، لدينا:

$\Delta P_l \equiv \frac{kg}{m^2s^2} = M^1L^{-2}T^{-2}$	$D \equiv m = L^1$	$v \equiv \frac{m}{s} = L^1T^{-1}$	$\rho \equiv \frac{kg}{m^3} = M^1L^{-3}$	$\mu \equiv Pa\ s = \frac{Ns}{m^2} = \frac{kg}{ms} = \frac{M}{LT} = M^1L^{-1}T^{-1}$

عدد الحدود π_i يساوي k-r ، مع k عدد المتغيرات (الخطوة 1) و r عدد الأبعاد اللازمة للتعبير عن الحدود π_i (الخطوة 2). في حالتنا : k = 5 متغيرات في الخطوة الاولى و r = 3 وحدات مستعملة في الخطوة الثانية. اذا عدد الحدود يساوي k-r =5-3=2.

الخطوة 4: نحدد عددًا من المتغيرات المتكررة، ويجب ألا تحتوي هذه المتغيرات على المتغير التابع الذي سيكون موضوع الدراسة ΔP. كما انها يجب ان تحتوي على اكبر عدد ممكن من الوحدات و يكون شكلها بسيط قدر الإمكان. في حالتنا نختار ρ ، V و D.

الخطوة 5: نقوم بتشكيل الحدود π_i بضرب المتغيرات غير المتكررة بجداء المتغيرات المتكررة المرفوعة إلى قوة تجعل المجموعة بلا أبعاد. يكون لكل حد π_i الشكل$u_i(u_1^a u_2^b u_3^c \ldots)$ حيث تكون u_i متغيرًا غير متكرر ؛ u_1 و u_2 و u_3 هي المتغيرات المتكررة ويتم تحديد الأسس a و b و c على أنها تركيبة بلا أبعاد. في حالتنا، فإن الحدود π_i هي:

$$\pi_1 = D^a V^b \rho^c \Delta P_l$$

نعوض الوحدات المكتوبة في الخطوة 2 و نساويها للحد الذي ليس له وحدة :

$$M^0 L^0 T^0 = L^a (L^1 T^{-1})^b (M^1 L^{-3})^c (M^1 L^{-2} T^{-2})$$

نبحث عن قيم الأسس a و b و c بالنسبة للطول L لدينا : $a + b - 3c - 2 = 0$ ، الزمن T لدينا : $-b - 2 = 0$ و أخيرا الكتلة M نحصل على : $c + 1 = 0$. حل هذه لمعادلات يعطي : $c = -1$، $b = -2$ و $a = 1$. عندما نعوض الأسس في معادلة الحد الأول نجد :

$$\pi_1 = D^1 V^{-2} \rho^{-1} \Delta P = \frac{D \Delta P_l}{\rho V^2}$$

نلاحظ ان هذا الحد ليس له و حدة.

نكمل بنفس الطريقة حتى ننهي جميع المتغيرات الغير متكررة.

$$\pi_2 = D^a V^b \rho^c \mu$$

$$M^0 L^0 T^0 = L^a (L^1 T^{-1})^b (M^1 L^{-3})^c \left(M^1 L^{-1} T^{-1}\right)$$

$$a + b - 3c - 1 = 0 \rightarrow a = -1$$

$$-b - 1 = 0 \rightarrow b = -1$$

$$c + 1 = 0 \rightarrow c = -1$$

ما يعطي:

$$\pi_2 = D^{-1} V^{-1} \rho^{-1} \mu = \frac{\mu}{\rho V D} = \frac{1}{Re}$$

الخطوة 6: التحقق من أن الحدود المحسوبة بلا أبعاد.

$$\pi_1 = \frac{D\Delta P_l}{\rho V^2} \equiv \frac{m\frac{kg\frac{m}{s^2}}{m\,m^2}}{\frac{kg}{m^3}\frac{m^2}{s^2}} = 1$$

$$\pi_2 = \frac{\mu}{\rho VD} = \frac{\frac{kg\frac{m}{s^2}}{m^2}s}{\frac{kg}{m^3}\frac{m}{s}m} = 1$$

الخطوة 7: تشكيل العبارة:

$$\pi_1 = \phi(\pi_2) \leftrightarrow \frac{D\Delta P_l}{\rho V^2} = \phi\left(\frac{\mu}{\rho VD}\right) = \phi_1\left(\frac{\rho VD}{\mu}\right) = \phi_1(Re)$$

مما يبين أن خسارة الضغط الخطي له علاقة بعدد رينولدس، تبقى الدالة ϕ أو ϕ_1 مجهولة حيث يجب حسابها. لقد اثبتت التجربة أنه في حالة الجريان الصفائحي: $\frac{D\Delta P_l}{\rho V^2} = \frac{\Delta P}{\frac{1}{2}\rho V^2}\frac{1}{2}\left(\frac{D}{l}\right) = \frac{32}{Re}$

أي أنه $\frac{\Delta P}{\frac{1}{2}\rho V^2} = \frac{64}{Re}\left(\frac{l}{D}\right) = f\left(\frac{l}{D}\right)$ ،

يسمى f معامل الاحتكاك الخطي في السريان الصفائحي $f = \frac{64}{Re}$. في هذه الحالة الدالة ϕ ثابتة وهي عبارة عن $\phi = 128\left(\frac{l}{D}\right)$

نلاحظ هنا انه تمكنا من اختصار خمس متغيرات الى متغيرين وهذا ما يوفر الجهد في التجارب او الحساب.