
UNIVERSITE LARBI BEN M'HIDI-OUM EL BOUAGHI
DEPARTEMENT DE S.N.V

1ère année S.N.V. Année 2022/2023.

Module : Mathématiques et Statistique. **Solution** du TD1 **Fonctions à une variable.**

Exercice 1 : Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer le domaine de définition :

◁ $f_1(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{2-x}}$.

$D_{f_1} = \{x \in \mathbb{R} / \quad x \geq 0 \quad \text{et} \quad 2-x \geq 0 \quad \text{et} \quad \sqrt{x}+\sqrt{2-x} \neq 0\}$.

$$\begin{aligned} 2-x \geq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad -x \geq -2 \\ &\Leftrightarrow \quad x \leq 2 \\ &\Leftrightarrow \quad x \in]-\infty, 2]. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \sqrt{x}+\sqrt{2-x} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{x} = \sqrt{2-x} = 0 \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ \text{et} \\ x = 2 \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \quad 2 = 0. \quad \text{absurde} \end{aligned}$$

donc $\forall x \in \mathbb{R}$: $\quad \sqrt{x}+\sqrt{2-x} \neq 0$.
et

$$x \geq 0$$

donc

$$\boxed{D_{f_1} = [0, 2]}$$

◁ $f_2(x) = \sqrt{\dfrac{1-\mid x \mid}{2-\mid x \mid}}$.

$D_{f_2} = \left\{x \in \mathbb{R} / \quad \dfrac{1-\mid x \mid}{2-\mid x \mid} \geq 0 \quad \text{et} \quad 2-\mid x \mid \neq 0\right\}$.

Etude de signe :

- $1-\mid x \mid \geq 0 \Leftrightarrow -\mid x \mid \geq -1 \Leftrightarrow \mid x \mid \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$.
- $2-\mid x \mid \geq 0 \Leftrightarrow -\mid x \mid \geq -2 \Leftrightarrow \mid x \mid \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$.

x	- ∞		-2		-1		1		2		+ ∞
1 -|x|		-		-	0	+	0	-		-	
2 -|x|		-	0	+		+		+	0	-	
$\dfrac{1-\lvert x\rvert}{2-\lvert x\rvert}$		+		-		+		-		+	

$D_{f_2} =]-\infty, -2[\cup [-1, 1] \cup]2, +\infty[$.

◁ $f_3(x) = \ln(\ln(\ln x))$.

$D_{f_3} = \{x \in \mathbb{R} / \quad x > 0 \quad \text{et} \quad \ln x > 0 \quad \text{et} \quad \ln(\ln x) > 0\}$.

$x > 0 \Leftrightarrow x \in]0, +\infty[$

et

$\ln x > 0 \Leftrightarrow x \in]1, +\infty[$

et

$$\begin{aligned} \ln(\ln x) > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \exp\{\ln(\ln x)\} > e^0 \\ &\Leftrightarrow \quad \ln(x) > 1 \\ &\Leftrightarrow \quad \exp\{\ln(x)\} > e^1 \\ &\Leftrightarrow \quad x > e. \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{D_{f_3} =]e, +\infty[}$$

Exercice 2 : Calculer les limites suivantes :

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+4x-5}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = 1.$

(2) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+4x-5}{x^2-1} = \dfrac{0}{0}.$ (Forme indéterminée).

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} \frac{x^2+4x-5}{x^2-1} &= \lim_{x\to 1} \frac{(x+5)(x-1)}{(x+1)(x-1)} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{(x+5)}{(x+1)} = 3.\end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 1} \frac{x^2+4x-5}{x^2-1} = 3}$$

(3) • $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x - \sqrt{x^2-1}\right) = +\infty \quad -\infty.$ (Forme indéterminée).

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \left(x-\sqrt{x^2-1}\right) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)} = 0.\end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \left(x-\sqrt{x^2-1}\right) = 0}$$

•• $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x-\sqrt{x^2-1}\right) = -\infty - \infty = -\infty$

(4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{tgx - \sin x}{\sin^3 x} = \dfrac{0}{0}.$ (Forme indéterminée).

$$\lim_{x\to 0} \frac{tgx-\sin x}{\sin^3 x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{\sin x \sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x(1-\cos x)}{\sin x \cos x \sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\cos x(1-\cos^2 x)} =$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\cos x(1-\cos x)(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x(1+\cos x)} = \frac{1}{2}.$$

$$\left(\text{Sachons que} \qquad tgx = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \text{et} \qquad \sin^2 x + \cos^2 x = 1\right)$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{tgx-\sin x}{\sin^3 x} = \frac{1}{2}}$$

(5) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}} = \dfrac{0}{0}.$ (Forme indéterminée).

$$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}} = \lim_{x\to 4} \frac{(\sqrt{2x+1}-3)(\sqrt{2x+1}+3)(\sqrt{x-2}+\sqrt{2})}{(\sqrt{x-2}-\sqrt{2})(\sqrt{x-2}+\sqrt{2})(\sqrt{2x+1}+3)} = \lim_{x\to 4} \frac{((2x+1)-9)(\sqrt{x-2}+\sqrt{2})}{((x-2)-2)(\sqrt{2x+1}+3)} =$$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{2(x-4)(\sqrt{x-2}+\sqrt{2})}{(x-4)(\sqrt{2x+1}+3)} = \lim_{x\to 4} \frac{2\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\right)}{\sqrt{2x+1}+3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

$$\boxed{\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}}$$

Rappel : $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty \implies \lim\limits_{x\to x_0} (f(x))^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)(f(x)-1)}$

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}(1+\sin x - 1)} = e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}} = e. \qquad \left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{limite remarquable}\right)$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}} = e}$$

(7) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^{2x} = 1^{\infty}.$ (Forme indéterminée).

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x+3}{x-2}\right)^{2x} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty} 2x\left(\frac{x+3}{x-2}-1\right)} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty} 2x\left(\frac{x+3-x+2}{x-2}\right)} = e^{10}.$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x+3}{x-2}\right)^{2x} = e^{10}}$$

(8) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{1-x} = \dfrac{0}{0}$. (Forme indéterminée).

On pose $t = 1-x$ Si $x \to 1$ alors $t \to 0$.
et $x = 1-t$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{1-x} = \lim_{t\to 0} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}(1-t)\right)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)}{t}$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)}{\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}t\right)} = \frac{\pi}{2}.$$

$$\left(\cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = 0, \quad \sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = 1, \quad \cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta) \quad \text{et} \quad \lim_{t\to 0} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)}{\left(\frac{\pi}{2}t\right)} = 1 \right).$$

$$\boxed{\lim_{x\to 1} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{1-x} = \frac{\pi}{2}.}$$

Exercice 3 :

Théorème 0.1. ***(Théorème des valeurs intermédiaires)***
Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $[a,b]$.
Si

1. *f est continue sur $[a,b]$.*
2. *$f(a).f(b) < 0$.*

alors $\exists c \in]a,b[$ *telque* $f(c) = 0$.
Si de plus f est strictement croissante (strictement décroissante) sur $[a,b]$ alors ***c*** *est* ***unique****.*

(•) La fonction $x \longrightarrow tgx + \frac{\pi}{3}$ est définie cotinue sur $\mathbb{R}$ comme somme de deux fonctions élémentaires définies sur $\mathbb{R}$, en particulier f sur $\left[\dfrac{3\pi}{4}, \pi\right]$.

Comme $f\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = -1 + \dfrac{\pi}{4} < 0$ et $f(\pi) = \dfrac{\pi}{3} > 0$.
D'après le Théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins une solution dans $\left]\dfrac{3\pi}{4}, \pi\right[$.
$f'(x) = 1 + tg^2x + \frac{\pi}{3} > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. f est continue, strictement monotone sur $\left[\dfrac{3\pi}{4}, \pi\right]$, alors **c** est **unique** ainsi l'équation $tgx + \frac{\pi}{3} = 0$ admet une solution unique sur l'intervalle $\left[\dfrac{3\pi}{4}, \pi\right]$.

Exercice 4 :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{1+x^2} & si \quad x \in [-1, 0[\\ \sqrt{x} & si \quad x \in [0, 3] \end{cases}$$

[I] (•) $D_f = [-1, 0[\cup [0, 3] = [-1, 3]$.

(•) $f(-1) = -1$ et comme f est définie à droite de $x_0 = -1$ seulement on étudier la continuité à droite de $x_0 = -1$

$$\lim_{x \xrightarrow{>} -1} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} -1} \frac{2x}{1+x^2} = -1.$$
donc f est une fonction continue à droite de $x_0 = -1$.

(•) f est **dérivable** au point $x_0 = -1 \iff \lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} \dfrac{f(x) - f(-1)}{x-(-1)} = L$, existe et est finie

Cette limite est appelée **nombre de dérivée** à droite de f au point $x_0 = -1$,

et on écrit $L = f'_d(-1)$.

$$\lim_{x \xrightarrow{>} -1} \frac{\frac{2x}{1+x^2} - (-1)}{x+1} = \lim_{x \xrightarrow{>} -1} \frac{(x+1)^2}{(1+x^2)(x+1)} = \lim_{x \xrightarrow{>} -1} \frac{(x+1)}{(1+x^2)} = 0.$$

$\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{f(x) - f(-1)}{x-(-1)} = 0$ existe et est finie et $f'(-1) = 0$.

donc f est dérivable au point $x_0 = -1$.

$(\bullet)$ $f(0)=0$ et comme f est définie au $\bigvee(0)$ on étudier la continuité et la dérivabilité au point $x_1=0$.

f est continue au point $x_1=0 \iff \lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x) = \lim\limits_{x\xrightarrow{<}0} f(x) = f(0)$.

D'une part $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x) = \lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} \sqrt{x} = 0$.

et d'autre part $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0} f(x) = \lim\limits_{x\xrightarrow{<}0} \dfrac{2x}{1+x^2} = 0$.

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x) = \lim\limits_{x\xrightarrow{<}0} f(x) = f(0)$. donc la fonction f est continue au point $x_1=0$.

$(\bullet\bullet)$ f est **dérivable** au point $x_1=0 \iff \lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-(0)} = \lim\limits_{\substack{< \\ x\to 0}} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-(0)} = L_1$.

L_1 existe et est finie et on écrit $L_1 = f'(0)$.

$$\lim_{\substack{> \\ x\to 0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-(0)} = \lim_{\substack{> \\ x\to 0}} \frac{\sqrt{x}-0}{x} = \lim_{\substack{> \\ x\to 0}} \frac{\sqrt{x}\sqrt{x}}{x\sqrt{x}} = \lim_{\substack{> \\ x\to 0}} \frac{1}{x} = \infty.$$

f n'est pas dérivable à droite donc ne lait pas au point $x_1=0$.

Etudier la dérivabilité à gauche :

$\lim\limits_{\substack{< \\ x\to 0}} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-(0)} = \lim\limits_{\substack{< \\ x\to 0}} \dfrac{2x}{x(1+x^2)} = 2$ existe et finie,

et $\quad 2 = f'(0)$ donc f est dérivable à gauche au point $x_1=0$.

$(\bullet)$ $f(3)=\sqrt{3}$ $\quad$ et comme f est définie à droite de $x_2=3$ seulement on étudier

la continuité à gauche de $x_2=3$.

la continuité à gauche de $x_2=3$.

$\lim\limits_{x\xrightarrow{<}3} \sqrt{x} = \sqrt{3} = f(3)$.

donc f est une fonction continue au point $x_2=3$.

$(\bullet\bullet)$ f est **dérivable à gauche** au point $x_2=3 \iff \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{f(x)-f(3)}{x-(3)} = L_2$, existe et est finie, on écrit $L_2 = f'(3)$.

$\lim\limits_{x\lesssim 3} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3} = \dfrac{0}{0}$. $\qquad$ (Forme indéterminée).

$\lim\limits_{x\lesssim 3} \dfrac{(\sqrt{x}-\sqrt{3})(\sqrt{x}+\sqrt{3})}{(x-3)(\sqrt{x}+\sqrt{3})} = \lim\limits_{x\lesssim 3} \dfrac{(x-3)}{(x-3)(\sqrt{x}+\sqrt{3})} = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$, cette limite existe et finie.

donc

$$\lim_{x\lesssim 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-(3)} = f'(3) = \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

donc f est dérivable à gauche au point $x_2=3$.

(II) Etudier la continuité sur l'ensemble de définition $\quad (D_f)$.

$$D_f = [-1,0[\, \cup \,[0,3] = [-1,3]\,.$$

(i) La fonction $x \longrightarrow \dfrac{2x}{1+x^2}$ est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$,

en particulier sur $]-1,0[\,$.

(ii) La fonction $x \longrightarrow \sqrt{x}$ est définie, continue et dérivable sur $[0,+\infty[$,

en particulier sur $]0,3[\,$.

Conclusion :

f est une fonction continue sur $]-1,0[\,\cup\,]0,3[$ et comme f et continue à droite de (-1) et à gauche de (3) et au point (0).

Donc f est **continue** sur $\quad D_f = [-1,3]\,$.

f est dérivable sur $]-1,0[\,\cup\,]0,3[$ et comme f est dérivable aux points (-1) $\quad$ et $\quad (3)$ mais pas en (0).

Donc f est **dérivable** sur $\quad [-1,0[\,\cup\,]0,3]\,$.

(III)

Définition : (Le prolongement par continuité :)
Soit f une fonction continue sur $(I-\{x_0\})$ et f n'est pas définie en x_0, n'est pas continue en x_0 mais f est définie au point
Si f n'est pas défnie en x_0, (f défnie sur $I-\{x_0\}$) et $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L,\quad L\in\mathbb{R}$
x_0 et $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$ (limite L existe et finie).
alors on définit un prolongement par continuité de f en x_0 par

$$\widetilde{f}(x)=\begin{cases} f(x) & si \quad x\in I-\{x_0\} \\ L & si \quad x=x_0\end{cases}$$

(•) f_1 est défnie sur $\mathbb{R}^*$

et $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=0$

et $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=1$.

Comme $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}\neq\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$, alors $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ n'existe pas en (0)

donc f_1 n'est pas prolongeable par continuité.

(•) $f_2(x)=\dfrac{x^3+5x+6}{x^3+1}$

La fonction f_2 n'est pas définie au point $x_1=-1$ et continue sur $\mathbb{R}-\{-1\}$,
et $\lim\limits_{x\to-1} f_2(x)=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+5x+6}{x^3+1}=2.$

Car $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+5x+6}{x^3+1}=\dfrac{0}{0}$. (Forme indéterminée).

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-1}\frac{x^3+5x+6}{x^3+1} &= \lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x^2-x+6)}{(x+1)(x-1)^2}\\ &= \lim_{x\to-1}\frac{(x^2-x+6)}{(x-1)^2}=2,\qquad \text{finie.}\end{aligned}$$

La prolonger de f_2 est :

$$\widetilde{f_2}(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3+5x+6}{x^3+1} & si \quad x\neq-1\\ 2 & si \quad x=-1\end{cases}$$

Exercice 5:

Théorème 0.2. *(Théorème de Rolle)*
Soit $a,b\in\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $[a,b]$.
Si

1. *f est continue sur $[a,b]$.*
2. *f est dérivable sur $]a,b[$.*
3. *$f(a)=f(b)$.*

alors, $\exists c\in\,]a,b[$ *telque* $f'(c)=0$.

La fonction $x\longrightarrow e^x sinx-1$ est définie, cotinue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

(Comme f est la somme et produit de fonctions élémentaires définies sur $\mathbb{R}$.)

en particulier continue sur $[0,\pi]$, dérivable sur $]0,\pi[$.

Comme $f(0)=f(\pi)=-1$; D'après Rolle il existe un réel $c\in]0,\pi[$ tel que $f'(c)=0$.

Donc $e^c(sinc+cosc)=0$ c'est à dire $sinc+cosc=0$ car $e^c\neq 0$.

Ainsi l'équation $sinx+cosx=0$ admet au moins une solution dans $c\in]0,\pi[$.

Exercice 6 :

(I) $f_1(x)=ln\left(tg\left(\sqrt{1-x^2}\right)\right)$ donc $f_1'(x)=tg\left(\sqrt{1-x^2}\right)'\left(ln\right)'\left(tg\left(\sqrt{1-x^2}\right)\right)$

$$\begin{aligned} f_1'(x) &= \left(\sqrt{1-x^2}\right)'\left(tg\right)'\left(\sqrt{1-x^2}\right)\frac{1}{tg\left(\sqrt{1-x^2}\right)} \\ &= \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\left(1+tg^2\left(\sqrt{1-x^2}\right)\right)\frac{1}{tg\left(\sqrt{1-x^2}\right)} \end{aligned}$$

$$f_1'(x)=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}tg\left(\sqrt{1-x^2}\right)}\left(1+tg^2\left(\sqrt{1-x^2}\right)\right)$$

$(\bullet)$ $f_2(x)=cos(e^{-x})$

donc $f_2'(x)=(e^{-x})'(cos)'(e^{-x})=\left(-e^{-x}\right)(-sin(e^{-x}))=e^{-x}sin(e^{-x})$

$(\bullet)$ $f_3(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x}}+1}{e^{\frac{1}{x}}-1}$

donc $f_3'(x)=\dfrac{\left(e^{\frac{1}{x}}+1\right)'\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)-\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)'\left(e^{\frac{1}{x}}+1\right)}{\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)^2}$

$$f_3'(x) = \frac{\left(\frac{-1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\right)\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)-\left(\frac{-1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\right)\left(e^{\frac{1}{x}}+1\right)}{\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)^2}=\frac{2e^{\frac{1}{x}}}{x^2\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)^2}$$

(II)

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-x}{x-sinx}=\dfrac{0}{0}$ $(F.I)$

Posons $f(x)=tgx-x$ et $g(x)=x-sinx$.

Les deux fonctions sont dérivables au $\vee(0)$ et $g'(x)=1-cosx\neq 0$ au $\vee(0)$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+tg^2x\right)-1}{1-cosx}=\lim_{x\to 0}\frac{tg^2x}{1-cosx}=\frac{0}{0}\quad (F.I)$$

On applique la règle de l'hopital une seconde fois :

$$\lim_{x\to 0}\frac{(tg^2x)'}{(1-cosx)'}=\lim_{x\to 0}\frac{2tg'xtgx}{sinx}=\lim_{x\to 0}\frac{2(1+tg^2x)tgx}{sinx}=\lim_{x\to 0}\frac{2(1+tg^2x)sinx}{cosxsinx}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2(1+tg^2x)}{cosx}=2$$

donc

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{tgx-x}{x-sinx}=2}$$

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty} x sin\dfrac{1}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{sin\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{1}{x}} = \dfrac{0}{0}$ $(F.I)$

$f(x) = sin\dfrac{1}{x^2}$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$ donc $f'(x) = -\dfrac{2}{x^3}cos\dfrac{1}{x^2}$ et $g'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{2}{x}cos\dfrac{1}{x^2} = 0$ d'ou $\lim\limits_{x\to+\infty} x sin\dfrac{1}{x^2} = 0$

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3+3x+3}{(x+2)ln(x+1)} = \dfrac{\infty}{\infty}$ $(F.I)$

On pose $f(x) = x^3+3x+3$ et $g(x) = (x+2)ln(x+1)$

donc $f(x) = 3x^2+3$ et $g(x) = ln(x+1) + \dfrac{x+2}{x+1} = \dfrac{(x+1)ln(x+1)+(x+2)}{(x+1)}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3(x^2+1)(x+1)}{(x+1)ln(x+1)+(x+2)} = \frac{\infty}{\infty} \quad (F.I)$$

On pose $f_1(x) = 3(x^2+1)(x+1)$ et $g_1(x) = (x+1)ln(x+1)+(x+2)$

On applique la règle de l'hopital une seconde fois sur f_1 et g_1

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{f_1'(x)}{g_1'(x)} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{3(2x)(x+1)+3(x^2+1)}{ln(x+1)+\dfrac{x+1}{x+1}+1} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{6x(x+1)+3(x^2+1)}{ln(x+1)+2} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{9x^2+6x+3}{ln(x+1)+2} \\ &= \frac{\infty}{\infty} \quad (F.I)\end{aligned}$$

On pose $f_2(x) = 3(3x^2+2x+1)$ et $g_2(x) = ln(x+1)+2$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f_2'(x)}{g_2'(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{18x+6}{\dfrac{1}{x+1}} = \lim\limits_{x\to+\infty} (18x+6)(x+1) = +\infty.$

d'ou $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f_1'(x)}{g_1'(x)} = +\infty$

et par conséquent $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = +\infty$

donc

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty}$$

Exercice 7 : On a cultivé la bactérie *Salmonella anatum* dans un bouillon nutritif ordinaire. Avec des comptages au cours des 8 premières heures, on a modélisé l'évolution de l'effectif *y* (en nombre de bactéries par mL) en fonction du temps *x* (en heures) par la fonction exponentielle :

$$y(\mathrm{x}) = 2240e^{1.035x}$$

1. Quel effectif (en nombre de bactéries par mL) pouvez-vous prévoir à 9 h dans l'hypothèse où le milieu n'est pas limitant ?
2. Quelles sont les vitesses de croissance aux temps 3 h ? 5 h ? 8 h ?

1. On va supposer que le modèle, qui a été validé au cours des 8 premières heures, est encore valable à 9 heures. C'est une hypothèse raisonnable si le milieu nutritif est suffisant.

Dans ce cas, en remplaçant x par 9, on obtient :

$$y = 2240\,e^{1,035\times 9} = 24\,871\,451$$

soit environ 25 millions de bactéries par mL.

2. La dérivée de y en fonction de x est :

$$y'(x) = 2240 \times 1,035\,e^{1,035x} = 2318,4\,e^{1,035x}.$$

Les vitesses de croissance demandées (en bactéries par mL et par heure) sont donc :

$$y'(3) \approx 51\,722 \quad ; \quad y'(5) \approx 409\,885 \quad ; \quad y'(8) \approx 9\,144\,220.$$