UNIVERSITE LARBI BEN M'HIDI-OUM EL BOUAGHI
DEPARTEMENT DE S.N.V

1ère année S.N.V. Année 2022/2023.

Module : Mathématiques et Statistique. TD1 **Fonctions à une variable.**

Exercice 1 : Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer le domaine de définition :

$$f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{2-x}} \quad , \quad f_2(x) = \sqrt{\frac{1-|x|}{2-|x|}} \quad , \quad f_3(x) = \ln(\ln(\ln x)) \quad .$$

Exercice 2 : Calculer les limites suivantes :

$$(1) \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+4x-5}{x^2-1} \quad , \quad (2) \lim_{x\to1} \frac{x^2+4x-5}{x^2-1} \quad , \quad (3) \lim_{x\to\pm\infty} \left(x-\sqrt{x^2-1}\right) \quad , \quad (4) \lim_{x\to0} \frac{tgx-\sin x}{\sin^3 x}$$

$$(5) \lim_{x\to4} \frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}} \quad , \quad (6) \lim_{x\to0} (1+\sin x)^{\frac{1}{x}} \quad , \quad (7) \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x+3}{x-2}\right)^{2x} \quad , \quad (8) \lim_{x\to1} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{1-x}$$

Exercice 3 :

Montrer que l'équation

$$tgx + \frac{x}{3} = 0$$

admet une solution unique sur $\left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$

Exercice 4:

$[I]$ Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction suivante :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{1+x^2} & si \quad x \in [-1,0[\\ \sqrt{x} & si \quad x \in [0,3] \end{cases}$$

(i) aux points $x_0 = -1, \ x_1 = 0, \ x_2 = 3.$

(ii) sur son domaine de définition.

$[II]$ Etudier la continuité des fonctions suivantes sur leurs domaines de défintion :

$$f_1(x) = \begin{cases} x^2+x & si \quad x \le 0 \\ \sin x & si \quad 0 < x \le \pi \\ 1+\cos x & si \quad x > \pi \end{cases} \quad , \quad f_2(x) = \begin{cases} (x^2-1) & si \quad x \le 0 \\ ax+b & si \quad 0 < x \le 1 \\ \sqrt{x+3} & si \quad x > 1 \end{cases}$$

$[III]$ peut-on prolonger par continuité au point x_0, les fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} \quad , \quad x_0 = 0 \quad , \quad f_2(x) = \frac{x^3+5x+6}{x^3+1} \quad , \quad x_0 = -1$$

Exercice 5 :

1) Appliquer le **théorème de Rolle** à la fonction définie par :

$$f(x) = e^x \sin(x) - 1 \qquad \text{dans } [0,\pi]$$

puis déduire que l'équation

$$\sin x + \cos x = 0$$

admet au moins une solution dans $]0,\pi[$.

Exercice 6 :

$[I]$ **Calculer les dérivées des fonctions suivantes :**

$$f_1(x) = \ln\left(tg\sqrt{1-x^2}\right) \quad , \quad f_2(x) = \cos\left(e^{-x}\right) \quad , \quad f_3(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}+1}{e^{\frac{1}{x}}-1} \quad .$$

$[II]$ **En utilisant la règle de l'hopital, calculer les limites suivantes :**

$$(1)\ \lim_{x\to 0}\frac{tgx - x}{x - \sin x} \quad , \quad (2)\ \lim_{x\to+\infty} x\sin\frac{1}{x^2} \quad , \quad (3)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+3x+3}{(x+2)\ln(x+1)}$$

.

Exercice 7 : On a cultivé la bactérie *Salmonella anatum* dans un bouillon nutritif ordinaire. Avec des comptages au cours des 8 premières heures, on a modélisé l'évolution de l'effectif *y* (en nombre de bactéries par mL) en fonction du temps *x* (en heures) par la fonction exponentielle :

$$y(\mathrm{x}) = 2240e^{1.035x}$$

1. Quel effectif (en nombre de bactéries par mL) pouvez-vous prévoir à 9 h dans l'hypothèse où le milieu n'est pas limitant ?
2. Quelles sont les vitesses de croissance aux temps 3 h ? 5 h ? 8 h ?