

CHAPITRE 1

CONTRAINTES DANS LES SOLS

I. DEFINITION ET HYPOTHESES

La mécanique des milieux continus est un domaine s'intéresse à la *déformation des solides* et à *l'écoulement des fluides*, si l'on regarde la matière de « très près » (échelle nanoscopique), la matière est granulaire, faite de molécules, mais à l'œil nu, un objet solide semble continu, c'est-à-dire que ses propriétés semblent varier progressivement.

La base de la mécanique des milieux continus est l'étude des déformations et des phénomènes associés à une transformation d'un milieu. La notion de déformation sert à quantifier de quelle manière les longueurs ont été dilatées et les angles ont changé dans le milieu (contraintes -déformations).

L'étude du comportement des matériaux réels (acier, béton, sols, etc.) implique des hypothèses simplificatrices qui permettent de définir deux grandeurs : les contraintes et les déformations.

L'hypothèse des milieux continus consiste à considérer des milieux dont les propriétés caractéristiques, c'est-à-dire celles qui nous intéressent (densité, élasticité, etc.) sont continues.

Des hypothèses supplémentaires peuvent éventuellement être faites ; ainsi un milieu continu peut être :

- homogène : ses propriétés sont les mêmes en tout point ;
- isotrope : ses propriétés ne dépendent pas du repère dans lequel elles sont observées ou mesurées.

Le sol se déforme sous l'action des contraintes dues aux efforts extérieurs provenant de l'ouvrage. Pour les besoins de la pratique, et par souci d'obtention des formules simples de calcul des contraintes et des déformations du sol, on suppose que le sol est un milieu continu soumis à son poids et aux surcharges de l'ouvrage, décrit par les équations générales de l'équilibre des massifs.

Les contraintes sont induites dans le sol par son poids ainsi que par la surcharge provenant de l'ouvrage. Pour le dernier cas, le calcul se base sur la théorie de l'élasticité et ne concerne dans ce chapitre que les cas de charges les plus courants dans les projets.

II. NOTIONS DE CONTRAINTES

II.1. CONTRAINTE TOTALE

Soit un massif de sol fin saturé, homogène et isotrope. Si on considère le sol de manière globale on peut assimiler le sol à un milieu continu et étudier les contraintes qui s'exercent sur une facette donnée en un point donné de ce massif.

Soit un massif à la surface duquel s'exercent des forces. En coupant ce massif par un plan fictif (P), l'élément de surface « δS », autour du point « M » sur la surface « S », est soumis à une force δF (fig I.1).

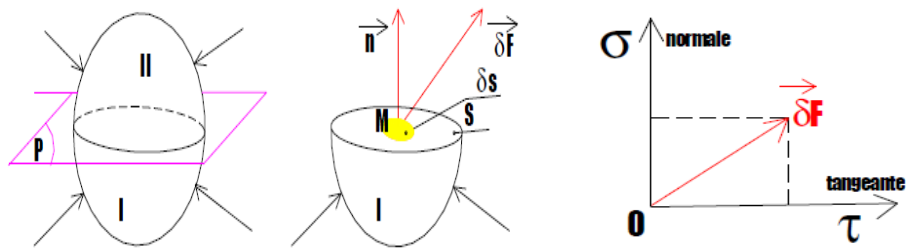


Fig I.1 : Contrainte dans un milieu

La contrainte au point « M » est le vecteur $\vec{f} = \frac{\delta \vec{F}}{\delta S}$, Cette contrainte se décompose en une contrainte

normale σ et une contrainte tangentielle τ d'où : $\vec{f} = \sigma \vec{n} + \tau \vec{t}$

Avec : \vec{n} vecteur unitaire normal sortant et \vec{t} vecteur unitaire tangent.

En mécanique des sols, pour déterminer l'état de contraintes autour d'un point « M » dans le sol, il suffit de connaître les composantes des forces s'exerçant sur les faces d'un parallélépipède centré autour du point « M » et dont les arêtes sont parallèles aux axes Ox , Oy , Oz .

L'état de contraintes au point M est défini par une matrice symétrique appelée tenseur de contraintes :

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

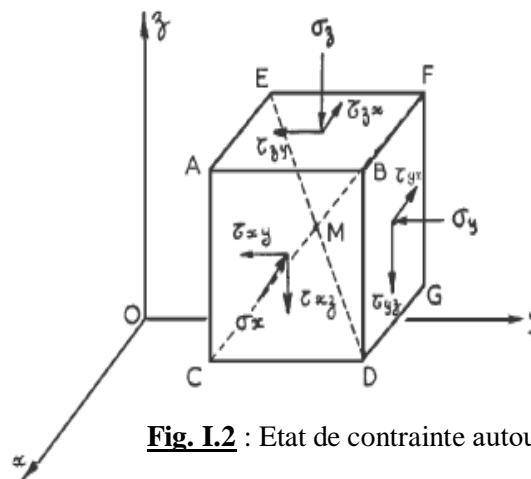


Fig. I.2 : Etat de contrainte autour d'un point M

La théorie montre que pour déterminer les contraintes qui s'exercent sur toutes les différentes facettes autour d'un point M , il suffit de connaître en ce point les valeurs des six quantités :

$$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{zx} = \tau_{xz} \text{ et } \tau_{yz} = \tau_{zy}$$

Parmi les facettes autour du point M , il existe 3 plans privilégiés pour les quels la contrainte tangentielle est nulle ($\tau = 0$). Ces 3 plans sont appelés **plans principaux**.

Leurs directions normales, **directions principales** et les contraintes correspondantes, **contraintes principales**, notées :

σ_1 : Contrainte principale majeure.

σ_2 : Contrainte principale intermédiaire.

σ_3 : Contrainte principale mineure.

Avec : $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

En d'autres termes, en prenant ces trois directions dites principales, comme repère, le tenseur des

contraintes devient diagonal : $\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$

II.2. CONTRAINTE EFFECTIVE 'POSTULAT DE TERZAGHI'

À l'intérieur d'un massif de sol, la pression de l'eau ou la pression de l'air s'appliquent en chaque point et se combinent aux contraintes totales pour induire le comportement local du sol. Dans les sols saturés (en eau), il est admis depuis la publication du « principe des contraintes effectives » de Terzaghi en 1925 que les déformations des sols ne dépendent pas séparément des contraintes totales et des pressions d'eau mais de leur différence. On introduit pour cette raison un nouveau type de contraintes, appelées « contraintes effectives » et qui sont reliées de la façon suivante aux contraintes totales et pressions interstitielles.

$$\sigma = \sigma' + u \text{ et } \tau = \tau'$$

Ou :

σ (respectivement τ) est la contrainte totale normale (respectivement tangentielle).

σ' (respectivement τ') est la contrainte effective normale (respectivement tangentielle).

u est la pression interstitielle du fluide ($u = \gamma_w \times h_w$).

σ' ne peut être mesurée mais seulement calculée.

Dans les sols secs les contraintes effectives sont identiques aux contraintes totales.

III. CERCLE DE MOHR

Mr MOHR eu l'idée de représenter de façon simple pour un point M donnée d'un solide, soumis à une contrainte f donnée la ventilation des contraintes normales ou tangentielles selon la facette considérée en utilisant un cercle appelé cercle de MOHR dont chaque point décrit par le cercle représente la lecture de (σ, τ) pour la facette d'angle θ considérée (θ angle entre la facette considérée et la facette siège de la contrainte majeure)

Dans le cas bidimensionnel, cas très fréquent en géotechnique, le cercle de Mohr est le lieu des extrémités des vecteurs contraintes et les contraintes principales se réduisent à deux.

III.1 METHODE ANALYTIQUE

Dans le système de repère (Ox, Oy) le tenseur de contraintes s'écrit :

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{xz} & \sigma_z \end{bmatrix} \text{ avec } \tau_{xz} = \tau_{zx}.$$

Connaissant les contraintes sur les facettes de normales Ox et Oz, on peut déterminer les contraintes sur n'importe qu'elle autre facette inclinée d'un angle « θ » - voir fig. I.3 –

On doit souligner, en mécanique des sols, on adopte la convention de signes suivante :

- $\sigma > 0$ en compression
- $\sigma < 0$ en traction

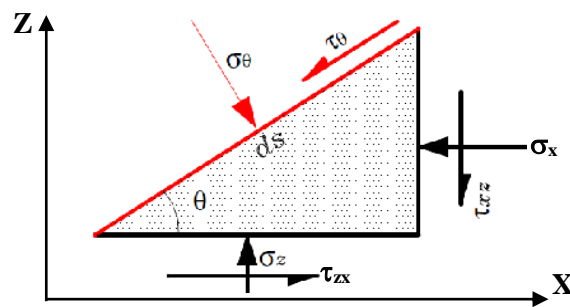


Fig I.3 : Etat de contrainte bidimensionnel.

Si l'on écrit la première condition d'équilibre (la somme des forces est nulle), on aura l'état de contrainte sur le plan incliné de « θ » comme suit :

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} + \frac{\sigma_z - \sigma_x}{2} \cos 2\theta - \tau_{xz} \sin 2\theta$$

$$\tau_\theta = \frac{\sigma_z - \sigma_x}{2} \sin 2\theta + \tau_{xz} \cos 2\theta$$

Le lieu de contraintes dans le plan (σ , τ) est défini par la relation :

$$\left(\sigma_\theta - \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \right)^2 + \tau_\theta^2 = \left(\frac{\sigma_z - \sigma_x}{2} \right)^2 + \tau_{xz}^2$$

C'est l'équation d'un cercle (cercle de Mohr) de :

- centre de coordonnées $\left(\frac{\sigma_x + \sigma_z}{2}, 0 \right)$.
- Rayon : $R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_z - \sigma_x}{2} \right)^2 + \tau_{xz}^2}$

L'orientation des plans principaux est obtenue pour $\tau_\theta = 0$, soit :

$$\theta_1 = -\frac{1}{2} \arctg \frac{2\tau_{xz}}{\sigma_z - \sigma_x} \quad \text{et} \quad \theta_2 = \theta_1 + \pi/2$$

Il existe donc deux plans principaux dont l'orientation est donnée par θ_1 et θ_2 . Les contraintes principales majeure et mineure sont déterminées à partir de l'équation du cercle :

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_z - \sigma_x}{2} \right)^2 + \tau_{xz}^2} \quad \text{et} \quad \sigma_3 = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_z - \sigma_x}{2} \right)^2 + \tau_{xz}^2}$$

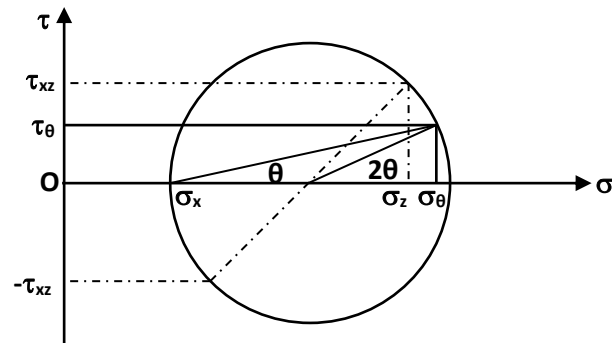


Fig I.4 : Cercle de Mohr.

A noter que, si les directions x et z sont principales ($\sigma_x = \sigma_3$; $\sigma_z = \sigma_1$ et $\tau_{xz}=0$) on trouve :

$$\sigma_{\theta} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos 2\theta$$

$$\tau_{\theta} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin 2\theta$$

III.2 METHODE GRAPHIQUE

Il s'agit de déterminer l'état de contraintes sur le plan incliné d'un angle θ et dont les valeurs des contraintes principales σ_1 et σ_3 sont connues (voir fig. I.5)

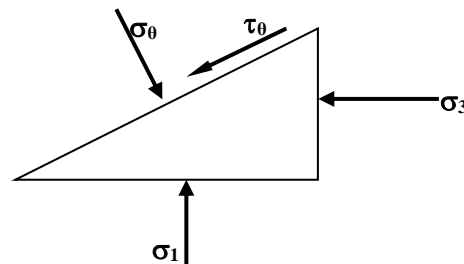


Fig I.5 : Etat de contrainte sur un plan incliné.

La démarche utilisée pour résoudre ce problème est la suivante (voir fig. I.6) :

- De σ_1 , on trace une parallèle au plan de σ_1
- De σ_3 , on trace une parallèle au plan de σ_3
- L'intersection des deux plans donne le pôle « P »
- Du pôle « P », on trace la parallèle à la facette sur laquelle on veut trouver l'état de contraintes (σ_{θ} et τ_{θ})
- L'intersection de cette droite avec le cercle donne σ_{θ} et τ_{θ} .

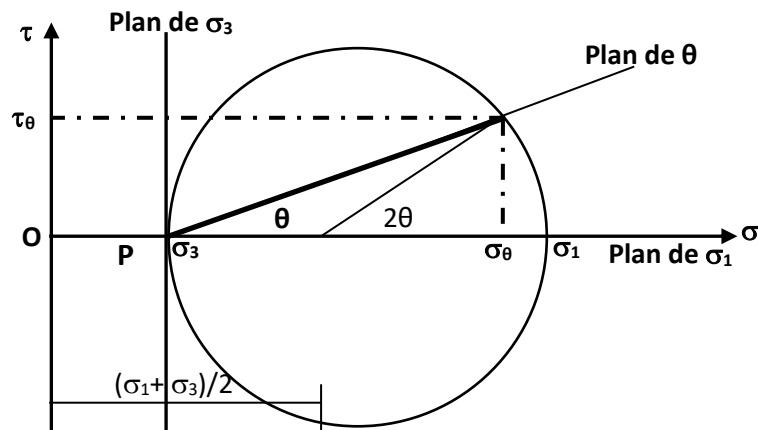


Fig I.6 : Cercle de Mohr (méthode graphique)

IV. CALCUL DES CONTRAINTES

IV.1. CONTRAINTE REELLE – PRINCIPE DE SUPERPOSITION-

Le sol est assimilé à un milieu semi-infini élastique à surface horizontale. Le calcul des contraintes dans un massif pesant et chargé est basé sur l'utilisation du principe de superposition (voir fig.I.7).

La contrainte réelle (σ_z) s'exerçant à la profondeur Z sur une facette horizontale est égale à la somme de la contrainte naturelle (σ_{v0}), due au poids du sol sus-jacent et de la contrainte due aux surcharges ($\Delta\sigma_z$).

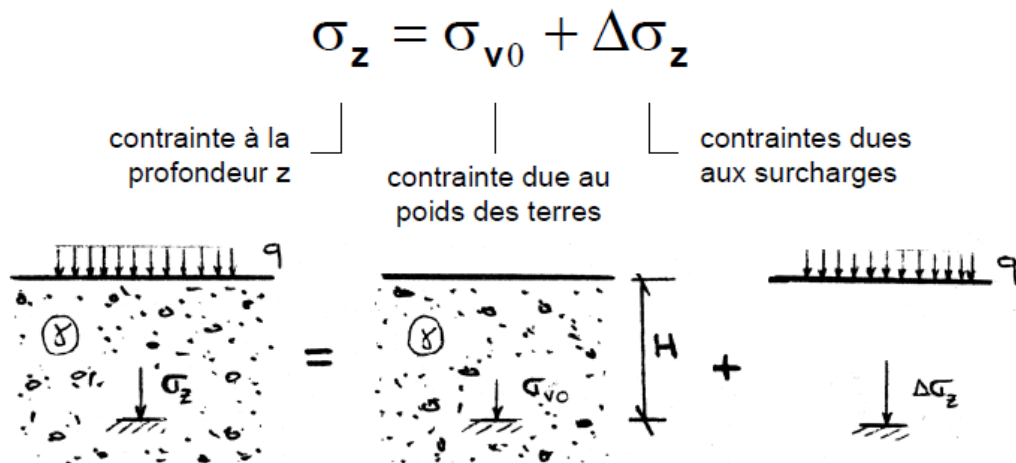


Fig I.7 : Principe de superposition.

IV.2. CONTRAINTES DUES AU POIDS PROPRE (GEOSTATIQUES)

On appelle contrainte naturelle (ou géostatique) la contrainte s'exerçant dans un sol à surface libre horizontale, sur une facette horizontale, avant tout chargement ; elle correspond généralement au poids des terres qui surmontent le point considéré. La facette considérée ayant sa normale verticale la contrainte normale correspondante est notée σ_{v0} .

Pour un sol de poids volumique γ (en kN/m^3), et à une profondeur z (en m) voir fig. I.8, la contrainte verticale est :

$$\sigma_V = \gamma_z \times z$$

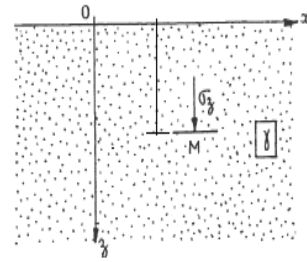


Fig. I.8 : Sol indéfini à surface horizontale

Dans le cas d'un sol stratifié en plusieurs couches de différents poids volumiques et différentes hauteurs: $\sigma_V = \sum \gamma_{di} \times d_i$

Exemple : Traçons les diagrammes de variation de σ_v , σ'_v et u en fonction de la profondeur

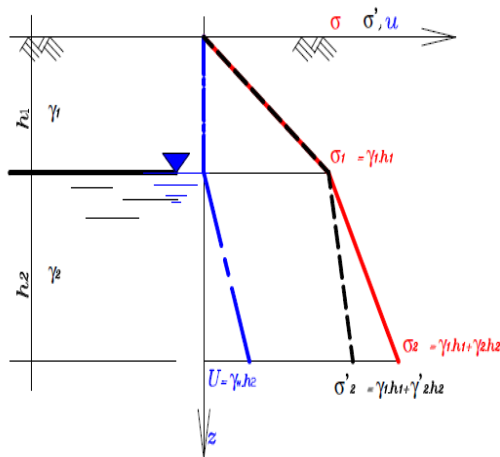


Fig I.9 Diagrammes de Variation des Contraintes Totales, Effectives et Interstitielles en fonction de la Profondeur.

IV.3. CONTRAINTE DUES AU SURCHARGE

IV.3.1 Cas d'une surcharge uniformément répartie sur toute la surface q

Dans ce cas et quelle que soit la profondeur z , on a :

$$\Delta\sigma_z = q$$

IV.3.2 Cas d'une surcharge ponctuelle Q

On utilise la formule de Boussinesq qui donne la contrainte verticale en tout point M d'un milieu élastique non pesant chargé par une force ponctuelle verticale Q :

$$\Delta\sigma_z = \frac{3Q}{2\pi} \frac{z^3}{(r^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

Cette relation peut encore s'écrire :

$$\Delta\sigma_z = \frac{Q}{z^2} N \quad \text{Avec} \quad N = \frac{3}{2\pi \left\{ 1 + \left(\frac{r}{z} \right)^2 \right\}^{\frac{5}{2}}}$$

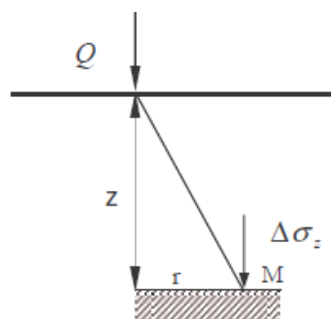


Fig. I.10 : Charge ponctuelle

L'abaque N° 1 en annexe donne les variations de N en fonction de r/z .

IV.3.3 Cas d'une charge rectangulaire uniforme

L'augmentation de contrainte dans un milieu semi-infini sous le coin d'une répartition rectangulaire uniforme (q) est donnée par la relation :

$$\Delta\sigma = k \cdot a \quad \text{Avec } q \text{ en KN/m}^2 \text{ et}$$

$$k = k(m, n) \quad \text{avec } m = \frac{a}{z}; n = \frac{b}{z} \quad \text{est un facteur}$$

d'influence sans dimension donné dans l'abaque N°2

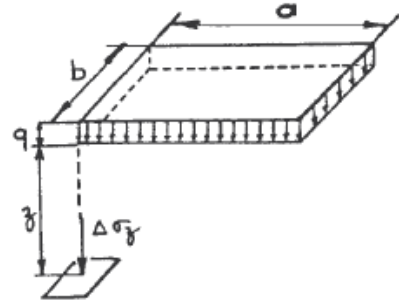
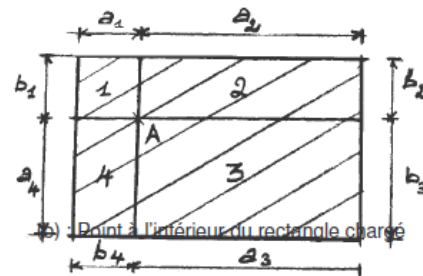


Fig. I.11 : Charge rectangulaire uniforme

Exemple

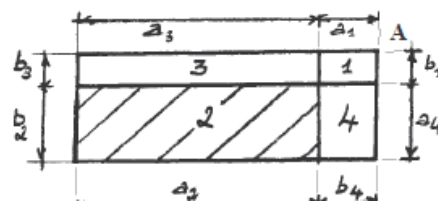
Si le point A est à l'intérieur du rectangle chargé

$$\Delta\sigma_z = (k_1 + k_2 + k_3 + k_4)q$$



Si le point A est à l'extérieur du rectangle chargé

$$\Delta\sigma_z = (k_{1,2,3,4} - k_{(3,1)} - k_{(1,4)} + k_1) \cdot q$$



IV.3.4 Charge en remblai de longueur infinie

La contrainte verticale **sous le coin** d'une distribution de charges de longueur infinie en forme de remblai et à la profondeur z (fig. I.12) est donnée par:

$$\Delta\sigma_z = I \cdot q$$

$I = I\left(\frac{a}{z}, \frac{b}{z}\right)$: coefficient sans dimension donné dans l'abaque N°3.

A noter :

Il s'agit bien d'une valeur de contrainte **sous le coin** d'une distribution de charge. Ainsi, lorsque le remblai à deux versants, ne pas oublier d'additionner l'action de la partie de droite à celle de la gauche.

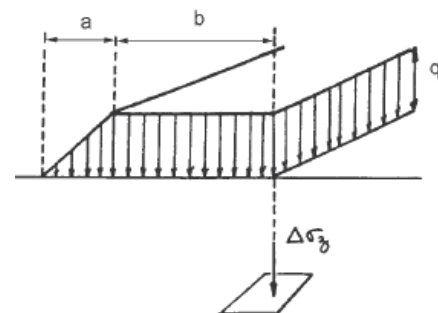
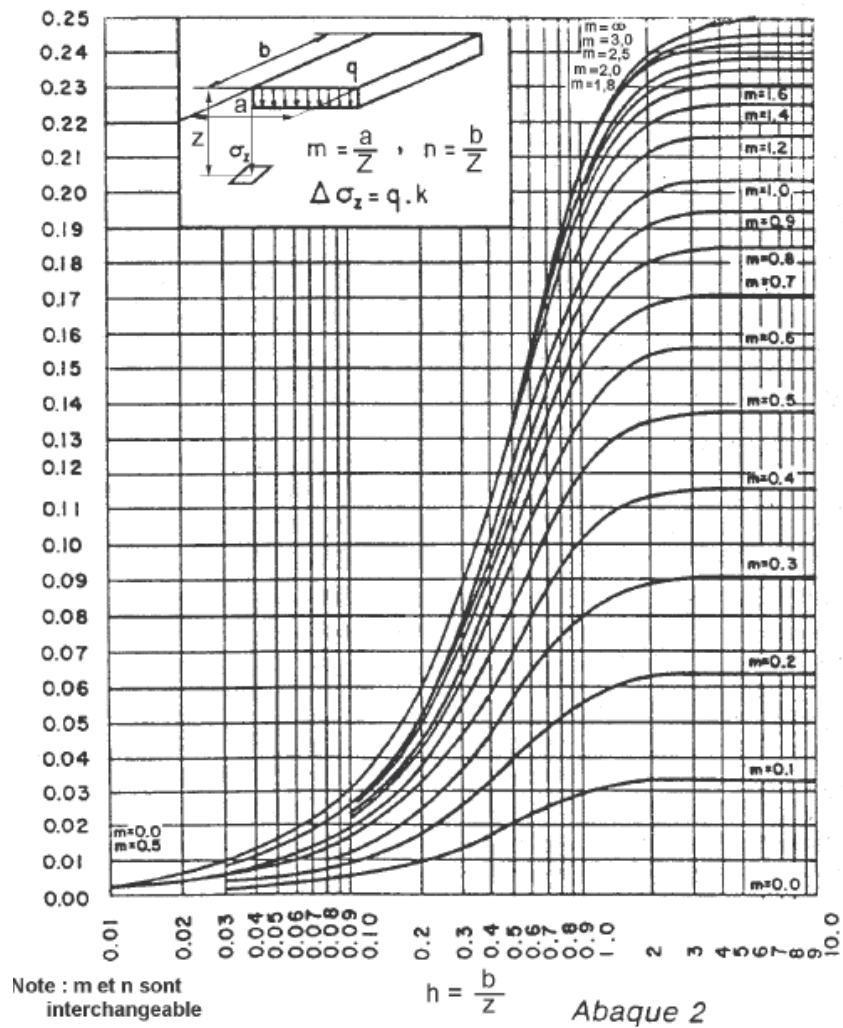
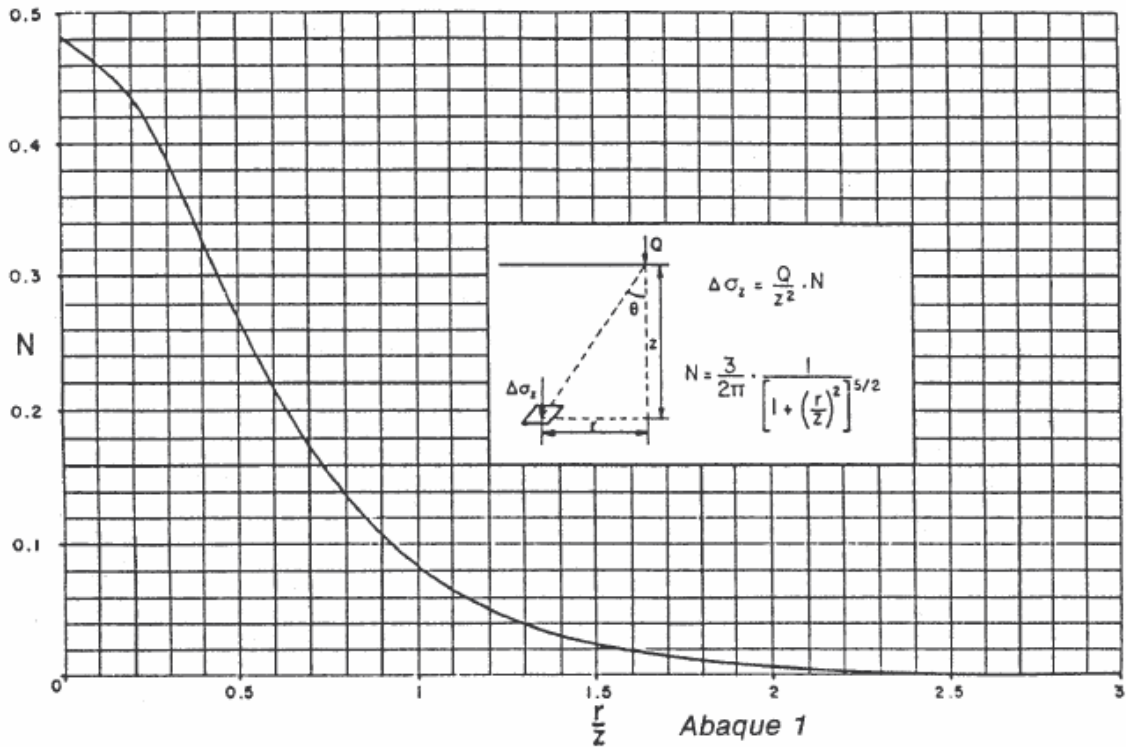
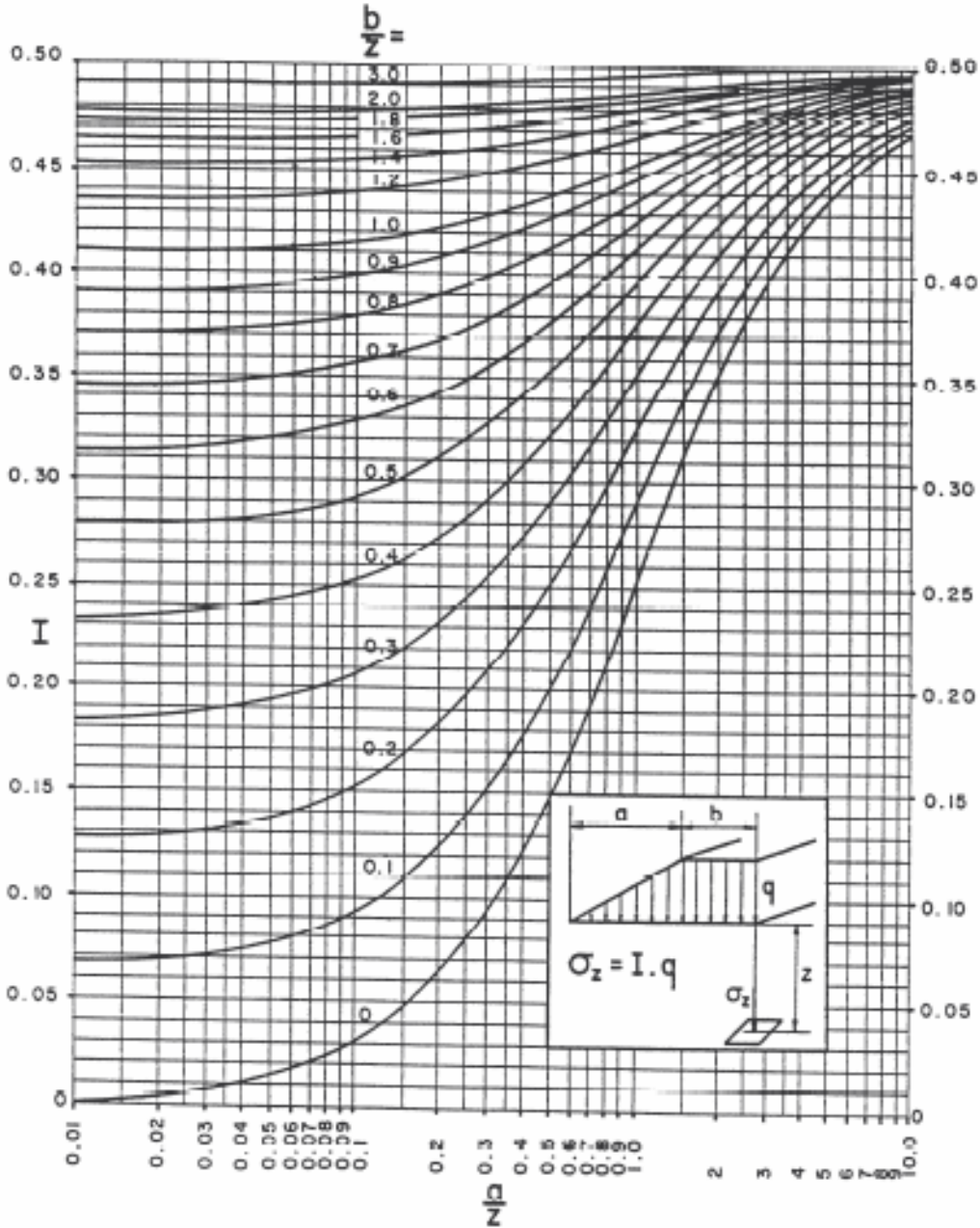


Fig. I.12 : Charge en remblai





Abaque 3