سلسلة التمارين الأولى (فضاءات سوبولاف Sobolev ذات الرتب الصحيحة)

التمرين الأول:

هل التوابع التالية تنتمي إلى $H^1(\mathbb{R})$؟

- $f(x) = \begin{cases} 1 & : \quad |x| \leq 1; \\ 0 & : \quad |x| > 1. \end{cases}$

- $g(x) = \begin{cases} x+1 & : \quad -1 \leq x \leq 0; \\ -x+1 & : \quad 0 \leq x \leq 1; \\ 0 & : \quad x \in \left]-\infty, -1\right[\cup \left]1, +\infty\right[. \end{cases}$

و هل التابع k المعرف بـ:

$$k(x) = \begin{cases} 1 & : \quad 0 < x < 1; \\ 0 & : \quad -1 < x < 0. \end{cases}$$

ينتمي إلى $H^2(]-1,1[)$.

التمرين الثاني:

من أجل $\alpha \in \mathbb{R}$، نعتبر التابع $x \longmapsto h(x) = x^\alpha$.

عين قيم α التي يكون من أجلها التابع في $H^2(]0,1[)$، ثم في $H^2(]1,+\infty[)$.

التمرين الثالث:

لتكن B كرة الوحدة على $\mathbb{R}^N$ مع $N \geq 3$.

بيـــــن أن التـــــابع $v(x) = |x|^{-\alpha}$ يكـــــون في الفضـــــاء $W^{1,p}(B)$ من أجل $0 < \alpha < \dfrac{N-p}{p}$،

لكنه غير محدود في جوار المبدأ.

التمرين الرابع:

- بين أن $\delta \notin L^2(\mathbb{R})$.

[إيحاء: استعمل المتتالية φ_j المعرفة بـ: $\varphi_j = \varphi(jx)$ مع $\varphi \in D(\mathbb{R})$ حيث $\varphi(0) = 1$]

- بين أن $\delta \notin H^{-1}(\mathbb{R})$.

[إيحاء: استعمل المســـاواة: $(\varphi(x))^2 = 2\displaystyle\int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\varphi'(t)dt$ من أجـــــل $\varphi \in D(\mathbb{R})$]

التمرين الخامس:

- أثبت أن المتباينة التالية محققة:

$$\forall\varphi\in D(\mathbb{R}^N),\ \forall 1,\cdots,N:\quad \left\|\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\le C\,\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}\cdot\left\|\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i^2}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$$

- استنتج قيام نفس العلاقة من أجل كل عنصر φ من $H^2(\mathbb{R}^N)$.
- هل بالإمكان تحديد إشارة التكامل $\int_{\mathbb{R}^N}\varphi(x)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i^2}(x)dx$ من أجل $\varphi\in D(\mathbb{R}^N)$.

التمرين السادس:

ليكن $T\in D'(\Omega)$ حيث Ω مفتوح من $\mathbb{R}^N$. نفرض وجود ثابت c بحيث:

$$\forall\varphi\in D(\Omega),\ |\langle T,\varphi\rangle|\le c\sqrt{\int_\Omega|\varphi(x)|^2\,dx}.$$

أثبت أنه توجد $f\in L^2(\Omega)$ بحيث: $\forall\varphi\in D(\Omega),\ \langle T,\varphi\rangle=\int_\Omega f(x)\varphi(x)dx$.

التمرين السابع:

1. أثبت أنه من أجل كل $\varphi\in D(\mathbb{R})$: $\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\le\|\varphi\|_{H^1(\mathbb{R})}$

[إيحاء: لاحظ أن $(\varphi(x))^2=2\int_{-\infty}^x\varphi(t)\varphi'(t)dt$ من أجـــــــل $x\in\mathbb{R}$]

2. ليكن $u\in H^1(\Omega)$:

   ◦ أثبت أنه من أجل كل $u\in H^1(\mathbb{R})$: $\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\le\|u\|_{H^1(\mathbb{R})}$

   ◦ بيّن صحة النتيجة السابقة من أجل $u\in H_0^1(I)$، حيث I مجال مفتوح من $\mathbb{R}$.

التمرين الثامن:

نعتبر $v\in H^1(\Omega)$ و $u\in H_0^1(\Omega)$.

- أثبت أن: $-\langle\Delta v,u\rangle_{H^{-1},H_0^1}=\int_\Omega\nabla u(x)\cdot\nabla v(x)dx$.
- نفرض أن $u\in H_0^1(\Omega)$ و $\Delta u\in L^2(\Omega)$.

قارن بين الجداء السلمي $(\Delta u,u)_{L^2,L^2}$ و $\|\nabla u\|$، ثمّ عيّن جميع حلول المعادلة $\Delta u=0$ في $H_0^1(\Omega)$.

التمرين التاسع:

ليكن $f\in L^2(\mathbb{R}^N)$. إن المعادلة $\Delta u-u=\frac{\partial f}{\partial x_i}$ تقبل حلا وحيدا $u\in H^1(\mathbb{R}^N)$. لماذا؟

- تأكد من وجود ثابت $C\ge 0$ بحيث $\|u\|_{H^1}\le C\cdot\|f\|_{L^2}$.
- أثبت وجود $M\ge 0$ بحيث من أجل كل $u\in H^2(\mathbb{R}^N)$ يكون $\|u\|_{H^2}\le M\cdot(\|u\|_{L^2}+\|\Delta u\|_{L^2})$.