الدوال الزائدية

تعريف: من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ نضع:

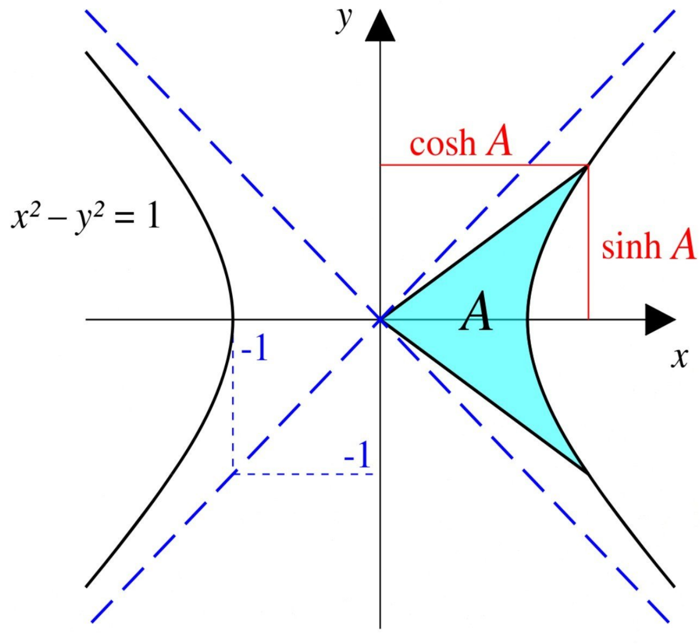
$$ch(x)=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}.$$

$$sh(x)=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}.$$

$$th(x)=\frac{sh(x)}{ch(x)}.$$

تم تعريف الدوال الزائدية بهذه الطريقة حتى تحقق معادلة قطع الزائد المتمثلة في:

$$x^2-y^2=1$$



بوضع:

$$\begin{cases} x=ch(t)\\ y=sh(t)\end{cases}$$

نتحصل على العلاقة التالية:

$$ch^2(t)-sh^2(t)=1$$

برهان

$$ch^2x-sh^2x=(ch(x)-sh(x))(ch(x)+sh(x))$$
$$=e^{-x}\cdot e^{x}=1$$

1) دراسة الدوال الزائدية

مجموعة التعريف $D_f=\mathbb{R}$

أ) دراسة الدالة sh

* النهايات:

$$\lim_{x\to+\infty} sh(x)=+\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} sh(x)=-\infty$$

* حساب المشتقة: $sh'(x)=ch(x)$

* جدول التغيرات:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$sh(x)$	$-\infty$ ↗	0	↗ $+\infty$

ومنه الدالة sh دالة مستمرة على $\mathbb{R}$ ومتزايدة تماما.

ب] دراسة الدالة ch

* الاستمرارية: الدالة ch مستمرة ومعرفة على $\mathbb{R}$.

* النهايات:

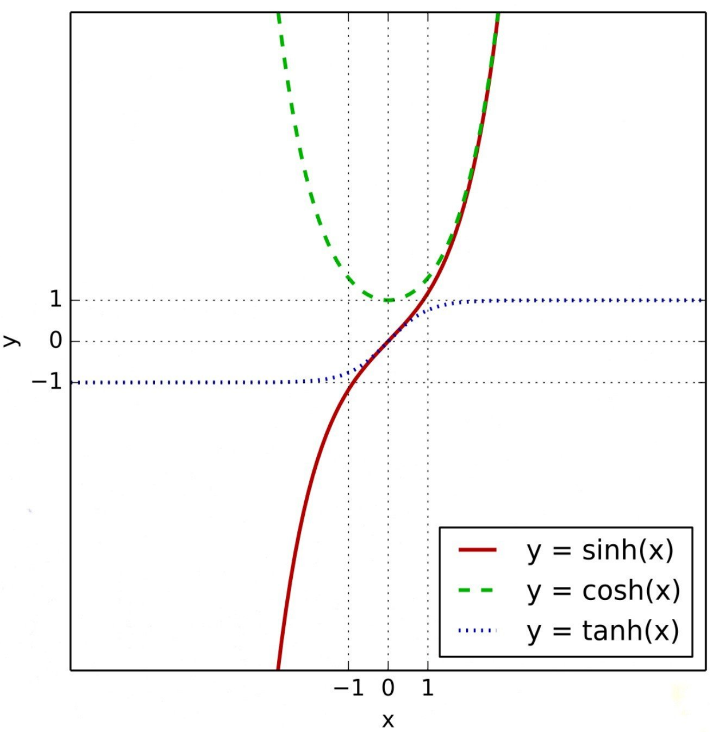
$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} ch(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} ch(x) = +\infty \end{array}\right.$$

* حساب المشتقة: $ch'(x) = sh(x)$

* جدول التغيرات:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$sh(x)$		$-$	0	$+$	
$ch(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

ج] رسم بياني للدالتين ch, sh



د] دراسة الدالة th

* الاستمرارية: الدالة th معرفة ومستمرة على $\mathbb{R}$.

* تبسيط الدالة th

$$th(x) = \frac{sh(x)}{ch(x)} = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

* النهايات:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} th(x) = 1 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} th(x) = -1 \end{array}\right\}$$

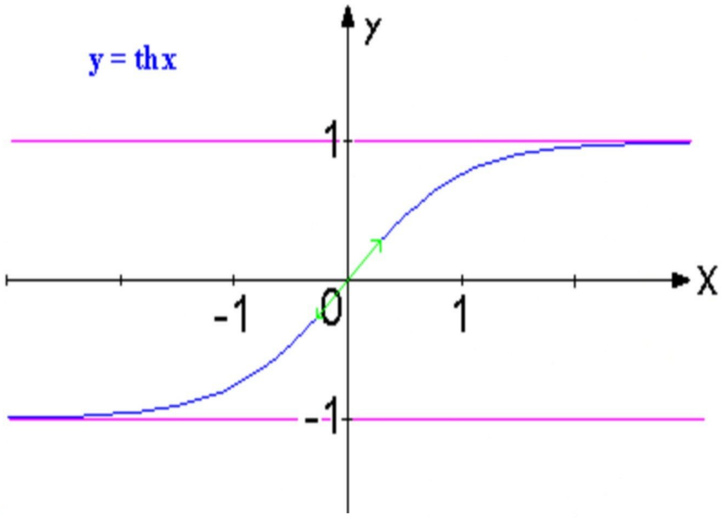
* حساب المشتقة:

$$th'(x) = 1 - th^2(x) = \frac{1}{ch^2(x)}$$

* جدول التغيرات:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$th'(x)$			$+$		
$th(x)$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1

الرسم البياني للدالة th



بعض العلاقات المهمة:

$$ch(x)+sh(x)=e^{+x}$$

$$ch(x)-sh(x)=e^{-x}$$

$$ch^2(x)-sh^2(x)=1$$

الدوال الزائدية العكسية

الدالة العكسية لـ sh :

الدالة sh مستمرة ورتيبة تماما على $\mathbb{R}$ وبذلك يمكننا تعريف الدالة العكسية لها على كامل $\mathbb{R}$ ونرمز لها: $argsh$.

أهم علاقة تميز الدوال العكسية هي:

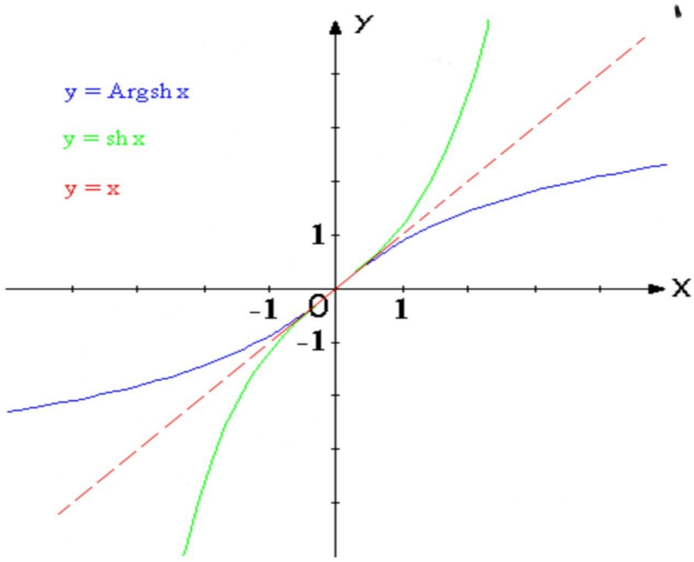
$$sh(argsh(x))=x$$

$$argsh(sh(x))=x .$$

و: $argsh : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

نحصل على تمثيلها البياني من التمثيل البياني للدالة sh من خلال التناظر بالنسبة للمستقيم $y=x$.

ومنه تمثيلها البياني كمايلي:



* إشتقاق الدالة $argsh$:

$$argsh'(x)=\frac{1}{sh'(argsh(x))}$$

$$=\frac{1}{ch(Argsh(x))}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+sh^2(argsh(x))}}$$

ومنه:

$$\boxed{Argsh'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}$$

الدالة العكسية لـ ch

الدالة ch مستمرة لكنها ليست رتيبة على $\mathbb{R}$ وبالتالي لا يمكن تعريف الدالة العكسية لها على كامل $\mathbb{R}$.

يمكننا تعريف الدالة العكسية للدالة ch على $]0,+\infty[$ لأنها رتيبة على هذا المجال.

نرمز للدالة العكسية للدالة ch بـ: ang ch

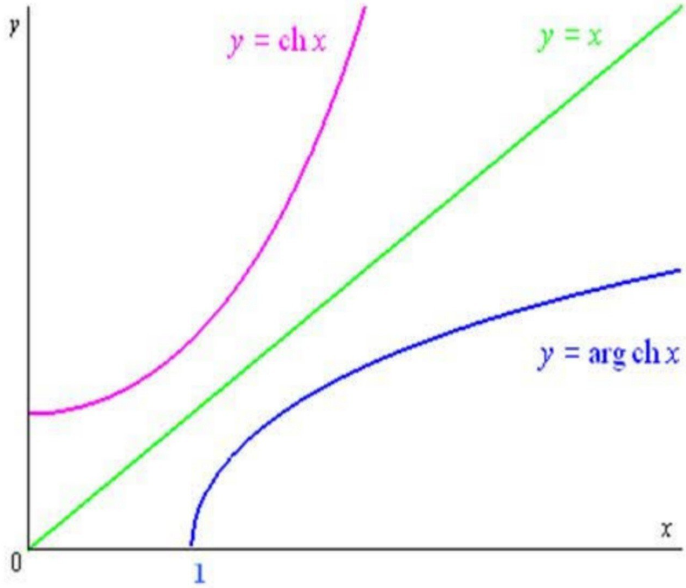
$$\operatorname{angch} : [1,+\infty[\longrightarrow [0,+\infty[$$

ونحقق:

$$ch(\operatorname{angch}(x)) = x$$

$$\operatorname{angch}(ch(x)) = x$$

بنفس الطريقة يمكننا الحصول على التمثيل البياني للدالة angch من التمثيل البياني للدالة ch.



* إشتقاق الدالة angch

بنفس الطريقة نحصل على:

$$\boxed{\operatorname{angch}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}}$$

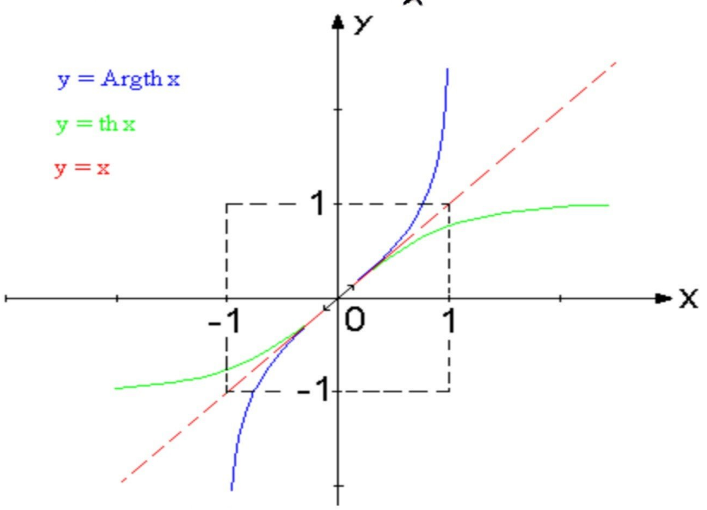
الدالة العكسية لـ angth

الدالة th دالة مستمرة ورتيبة تماما على $\mathbb{R}$ ومعرفة من $\mathbb{R}$ نحو $]-1,1[$ ومنه يمكننا تعريف الدالة العكسية للدالة th

نرمز للدالة العكسية للدالة th بـ: ang th

$$\operatorname{angth} :]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}$$

* رسمها البياني:



* دالتها المشتقة:

$$\boxed{\operatorname{angth}'(x) = \frac{1}{1-x^2}}$$

ولدينا:

$$th(\operatorname{angth}(x)) = x$$

$$\operatorname{angth}(th(x)) = x$$