2ème année LMD Maths (S4).

Corrigé-type de controle en Probabilité

Exercice 1. *1) Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *un espace probabilisé et* A , B *deux évènements de* $\mathcal{F}$ *tels que* $P\left(\overline{A}\right) = 0,3$, $P(B) = 0,2$ *et* $P(A \cup B) = 0,9$. *Calculer* $P(A \cap B)$, $P\left(\overline{A} \cap B\right)$, $P\left(A \cap \overline{B}\right)$, $P(A/B)$ *et* $P(B/A)$. *Est ce que* A *et* B *sont indépendants*

Solution

* $P(A) = 1 - P\left(\overline{A}\right) = 1 - 0,3 = 0,7$

* $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0,7 + 0,2 - 0,9 = 0$

* $P\left(\overline{A} \cap B\right) = P(B) - P(A \cap B) = 0,2 - 0 = 0,2$

* $P\left(A \cap \overline{B}\right) = P(A) - P(A \cap B) = 0,7 - 0 = 0,7$

* $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0}{0,2} = 0$

* $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0}{0,7} = 0$

* *Pour que* A *et* B *soient indépendants on doit avoir* $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$ *mais on a* $P(A \cap B) = 0$ *et* $P(A)\,P(B) = 0,7 \times 0,2 = 0,14$ *Donc* $P(A \cap B) \neq P(A)\,P(B)$ *donc* A *et* B *ne sont pas indépendants.*

2) On pose 20 *questions à un candidat. Pour chaque question* 5 *réponses sont proposées dont une seule est la bonne. Le candidat choisit au hasard une des réponses proposées. On lui attribue un point par bonne réponse. Soit* X *le nombre de points obtenus. Quelle est la loi de* X *? calculer* $E(X)$ *et* $V(X)$. *Calculer la probabilité que le candidat répond juste à toutes les questions.*

Solution

On peut considérer les 20 *questions comme* 20 *expériences possèdent les propriétés suivantes*

- *Les expériences sont indépendantes*
- *Chaque expériences a deux résultats JUSTE Ou Faux*
- *La probabilité que la réponse soit juste est toujours* $p = \frac{1}{5} = 0,2$

X *le nombre de points obtenus = le nombre des réponses justes*

Sous ces conditions on a X *suit la loi* $B(20, 0,2)$ *c à d* $X(\Omega) = \{0, 1, ..., 20\}$ *et*

$$\forall k \in X(\Omega) : P(X = k) = C_{20}^{k}\,(0,2)^{k}\,(0,8)^{20-k}$$

*On a $E(X) = np = 20 \times 0,2 = 4$, $V(X) = np(1-p) = 20 \times 0,2 \times 0,8 = 3,2$

* La probabilité que le candidat répond juste à toutes les questions$= P(X=20) = C_{20}^{20}(0,2)^{20}(0,8)^{20-20} = (0,2)^{20}$

Exercice 2. *Soit X une v a de densité*

$$f(t) = \begin{cases} \alpha e^{-\frac{1}{2}t}, si\ t \geq 0 \\ 0,\ si\ t < 0 \end{cases}$$

a) Déterminer α puis calculer $E(X)$ et $V(X)$.

b) Déterminer la fonction de répartition de X.

c) Calculer $P\left(X > \frac{1}{2}\right)$, $P(X<1)$ et $P\left(\frac{1}{2} < X < 1\right)$.

Solution

a) Comme f est une densité alors on a : $\forall t \in \mathbb{R}\ f(t) \geq 0 \Longrightarrow \alpha > 0$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{+\infty} \alpha e^{-\frac{1}{2}t}dt = 0 + \alpha\left[-2e^{-\frac{1}{2}t}\right]_0^{+\infty} = 2\alpha = 1 \Longrightarrow \alpha = \frac{1}{2}$ *(X suit la loi exponentielle de paramètre $\alpha = \frac{1}{2}$)*

* $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,dt = \frac{1}{\alpha} = 2$, *$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,dt = \frac{2}{\alpha^2} = 8$ *$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{1}{\alpha^2} = 4$

b) Fonction de répartition F on a $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

Si $x \leq 0,\ F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0$

Si $x \geq 0,\ F(x) = \int\limits_{-\infty}^{0} 0dt + \int\limits_{0}^{x} \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t}dt = 1 - e^{-\frac{1}{2}x}$, *Donc*

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{1}{2}x}, si\ x \geq 0 \\ 0,\ si\ x \leq 0 \end{cases}$$

c) On a * $P\left(X > \frac{1}{2}\right) = 1 - F\left(\frac{1}{2}\right) = e^{-\frac{1}{4}}$

* $P(X < 1) = F(1) = 1 - e^{-\frac{1}{2}}$

* $P\left(\frac{1}{2} < X < 1\right) = F(1) - F\left(\frac{1}{2}\right) = e^{-\frac{1}{4}} - e^{-\frac{1}{2}}$

Exercice 3. *Soit* X *une variable aléatoire réelle définie sur l'espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. *Déterminer la loi de* X , $E(X)$ *et* $V(X)$ *dans les cas suivants :*

1. $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ *et qu'il existe* $\alpha \in]0,1[$ *tel que :*
$\forall n \in \mathbb{N}^* : P[X = n] = \alpha P[X = n-1]$.

2. $X(\Omega) = \{0, 1, ..., n\}$ *et qu'il existe* $\delta \in \mathbb{R}$ *tel que :*
$\forall k \in X(\Omega) : P[X = k] = C_n^k \delta$.

3. $X(\Omega) = \mathbb{N}$ *et qu'il existe* $\theta \in \mathbb{R}$ *tel que*
$\forall n \in \mathbb{N}^* : P[X = n] = \frac{\theta}{n} P[X = n-1]$.

Solution

Toute loi de probabilité doit vérifier $\sum\limits_{k \in X(\Omega)} P[X = k] = 1$ *alors on a :*

1) $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ *et*

$\forall n \in \mathbb{N}^* : P[X = n] = \alpha P[X = n-1] = \alpha^2 P[X = n-2] = ... = \alpha^{n-1} P[X = 1]$

et $\sum\limits_{n \in X(\Omega)} P[X = n] = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \alpha^{n-1} P[X = 1] = P[X = 1] \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \alpha^{n-1} = P[X = 1] \frac{1}{1-\alpha} = 1 \Longrightarrow P[X = 1] = (1 - \alpha)$

$\forall n \in \mathbb{N}^* : P[X = n] = \alpha^{n-1}(1 - \alpha)$ *Donc* X *suit la loi géométrique de paramètre* $(1 - \alpha)$

$E(X) = \frac{1}{1-\alpha}$ $\qquad V(X) = \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}$

2) $X(\Omega) = \{0, 1, ..., n\}$ *et qu'il existe* $\delta \in \mathbb{R}$ *tel que :* $\forall k \in X(\Omega) : P[X = k] = C_n^k \delta$.

$\sum\limits_{k\in X(\Omega)} P\left[X=k\right] = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \delta = \delta \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k = \delta 2^n = 1 \Longrightarrow \delta = \frac{1}{2^n}$ *Donc*

$\forall k \in X\left(\Omega\right) : P\left[X=k\right] = C_n^k \frac{1}{2^n}$ *C à d X suit la loi binomiale* $B\left(n, \frac{1}{2}\right)$

$E\left(X\right) = np = \frac{n}{2} \qquad V\left(X\right) = np\left(1-p\right) = \frac{n}{4}$

3) $X\left(\Omega\right) = \mathbb{N}$ *et qu'il existe* $\theta \in \mathbb{R}$ *tel que*

$\forall n \in \mathbb{N}^* : P\left[X=n\right] = \frac{\theta}{n} P\left[X=n-1\right] = \frac{\theta}{n}\frac{\theta}{n-1} P\left[X=n-2\right] = ... = \frac{\theta^n}{n!} P\left[X=0\right]$

et $\sum\limits_{n\in X(\Omega)} P\left[X=n\right] = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{\theta^n}{n!} P\left[X=0\right] = P\left[X=0\right] \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{\theta^n}{n!} = P\left[X=0\right] e^{\theta} = 1 \Longrightarrow P\left[X=0\right] = e^{-\theta}$

Donc $\forall n \in \mathbb{N} : P\left[X=n\right] = \frac{\theta^n}{n!} e^{-\theta}$ *Donc X suit la loi de Poisson de paramètre* θ

$E\left(X\right) = \theta \qquad V\left(X\right) = \theta$