ULBM, FSSA, Dép. ST **Le 22 / 05 / 2022**

2^{eme} ST **Durée 1h30 min**

EMD

Méthodes Numériques

Remarque : Résoudre obligatoirement le premier problème et choisir deux des autres.

Problème 1 : (8 pts)

On donne l'équation $f(x) = 2e^x - 2x - 3 = 0$.

1. Trouver graphiquement le nombre de racines de cette équation et vérifier les intervalles trouvés par le calcul ? (2,5 pts)
2. Vérifier les conditions de convergence de la méthode de Newton-Raphson pour l'intervalle **[-1.5, -1]** ? (1 pt)
3. Calculer la racine de cette équation si on donne $X_0 = -1$ et $\varepsilon = 10^{-4}$, prenez **4** chiffres après la virgule? (4,5 pts)

Problème 2 : (6 pts)

On veut calculer l'intégrale $I = \int_{-1}^{1}(2e^x - 2x - 3)dx$ par la méthode du trapèze.

1. Trouver l'intervalle ***h*** pour que l'erreur $|R(f)|$ ne dépasse pas ***0.1*** ? (2,5 pts)
2. Calculer cette intégrale si on donne $h = \frac{2}{7}$ en prenant ***3*** chiffres après la virgule ? (2 pts)
3. Comparer le résultat trouvé avec celui exact ? (1,5 pts)

Problème 3 : (6 pts)

Soit le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 6 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 16 \\ 14 \end{bmatrix}$$

1. Calculer le nombre d'opérations nécessaires pour la méthode de Gauss ? (1,5 pts)
2. Trouver la solution du système par la méthode de Gauss ? (4 pts)
3. En déduire la valeur du déterminant de la matrice du système ? (0,5 pts)

Problème 4 : (6 pts)

On veut résoudre le système donné dans le problème 3 par la méthode de Gauss-Seidel.

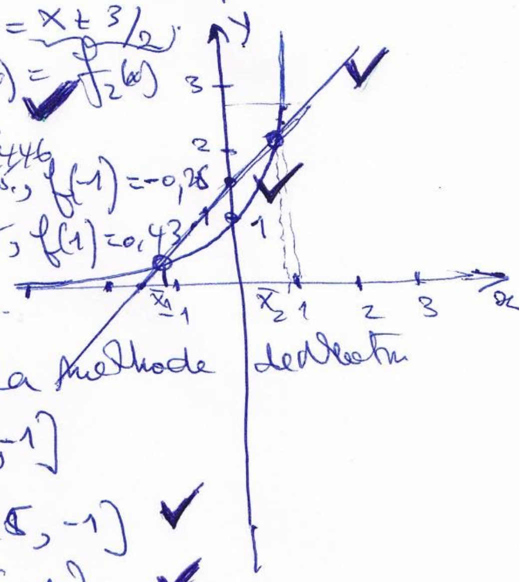
1. Vérifier les conditions de convergence de cette méthode, réécrire le système si nécessaire ? (1,5 pts)
2. Ecrire le système sous la forme ***X=TX+S*** ? (1,0 pt)
3. Si on donne comme vecteur estimé initial $X^{(0)}=(0.5, 1, 1)$ et comme précision $\varepsilon=10^{-2}$, calculer la solution du système en prenant **2** chiffres après la virgule ? (3,5 pts)

Solution EMD
Méthodes Numériques 2022

Problème 1 (obligatoire), on a $f(x) = 2e^{x} - 2x - 3 = 0$.

1) Trouver le nombre de racines de l'équation.

$$2e^{x} - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \underbrace{e^{x}}_{f_1(x)} = \underbrace{x + 3/2}_{f_2(x)}$$



L'équation a deux racines.

$\bar{x}_1 \in [-1{,}5, -1]$, $f(-1{,}5) = 0{,}446$, $f(-1) = -0{,}26$

$\bar{x}_2 \in [0{,}5, 1]$, $f(0{,}5) = -0{,}7$, $f(1) = 0{,}43$

$f(-1{,}5) \times f(-1) < 0$ et $f(0{,}5) \cdot f(1) < 0$.

2) Conditions de convergence de la méthode de Newton Raphson pour l'intervalle $[-1{,}5, -1]$

$f'(x) = 2e^{x} - 2 < 0 \quad \forall x \in [-1{,}5, -1]$

$f''(x) = 2e^{x} > 0 \quad \forall x \in [-1{,}5, -1]$

Donc la méthode converge.

3) Calcul de la racine si $x_0 = -1$ et $\varepsilon = 10^{-4}$;

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2e^{x_n} - 2x_n - 3}{2e^{x_n} - 2} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$n = 0$: $x_1 = -1{,}2090 \quad |x_1 - x_0| > \varepsilon$

$n = 1$: $x_2 = -1{,}1983 \quad |x_2 - x_1| > \varepsilon$

$n = 2$: $x_3 = -1{,}1983 \quad |x_3 - x_2| < \varepsilon$

La solution est $x_3 = -1{,}1983$.

$\Sigma = 8$ pts 1/4

Problème 2 : $I = \int_{-1}^{1} (2e^x - 2x - 3)\,dx$

1) Calcul de h pour que $|R(f)| < 0.1$

$$R(f) = -\frac{b-a}{12} h^2 f''(z) \quad z \in [-1,1]$$ ✓

$$\Rightarrow h \le \sqrt{\frac{12|R(f)|}{(b-a)\, f''(z)}}$$ ✓

On calcule $f''(x) = 2e^x$ ✓ $\underset{[-1,1]}{\text{Max}} |2e^x| = 2e \Big|_{x=1}$ ✓

$$\rightarrow h \le \sqrt{\frac{12 \cdot 0,1}{2 \cdot 2e}} = 0,3322$$ ✓

2) On prend $h = 2/7$, on demande I, $x_i = a + ih$

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
-1	$-5/7$	$-3/7$	$-1/7$	$1/7$	$3/7$	$5/7$	1

$$I = \frac{h}{2}\left[f_0 + 2\sum f_i + f_n\right]$$ ✓ avec $f_i = f(x_i)$;

$$= \frac{h}{2}\left[f_0 + 2(f_1+f_2+f_3+f_4+f_5+f_6) + f_7\right]$$ ✓

$$I = \frac{1}{7}\left[-0,264 + 2(-0,592 - 0,840 - 0,981 - 0,979 - 0,787 - 0,343) + 0,437\right]$$ ✓

$= -1,267$ ✓

3) Calcul du résultat exact :

$$I = \int_{-1}^{1}(2e^x - 2x - 3)\,dx = \left[2e^x - x^2 - 3x\right]_{-1}^{1}$$ ✓

$$= [1,437 - 2,736] = -1,299$$ ✓

$$Err\% = \left|\frac{-1,299 + 1,267}{-1,299}\right| \times 100\% = 2,46\%$$ ✓

$Err\% < 5\%$ le calcul est <u>acceptable</u>.

$\Sigma = 6pts$

Problème 3 : On a $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 6 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 16 \\ 14 \end{bmatrix}$

1) Nombre d'opérations par la méthode de Gauss

$n_a = n_m = \frac{n(2n+5)(n-1)}{6} = 11$ ✓✓

$n_d = \frac{n(n+1)}{2} = 6$ ✓

$N_{op} = 11 + 11 + 6 = 28$ op1

2) Calcul de la solution par Gauss.

. Etape 1 : vérification du pivot $a_{11}^{(0)} = 4 \neq 0$

$\left.\begin{array}{l} L_2^{(1)} = L_2^{(0)} - 3/4\, L_1^{(0)} \\ L_3^{(1)} = L_3^{(0)} - 1/2\, L_1^{(0)} \end{array}\right\}$ ✓

$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 1/2 & 21/4 & 23/2 \\ 0 & 4 & 3/2 & 11 \end{array}\right]^{(1)}$ ✓✓

Etape 2 vérification du pivot $a_{22}^{(1)} = 1/2 \neq 0$

$\left.L_3^{(2)} = L_3^{(1)} - \frac{4}{1/2} L_2^{(1)}\right\}$ ✓

$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 1/2 & 21/4 & 23/2 \\ 0 & 0 & -81/2 & -81 \end{array}\right]$ ✓

Substitution en arrière

de l'équ (3) $-81/2\, x_3 = -81 \rightarrow x_3 = 2$ ✓

de l'équ (2) $\frac{x_2}{2} + \frac{21}{4} x_3 = 23/2 \rightarrow x_2 = 2$ ✓

de l'équ (1) $4x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \rightarrow x_1 = 0$ ✓

$(x_1, x_2, x_3) = (0, 2, 2)$.

3) $Det(A) = a_{11}^{(0)} \times a_{22}^{(1)} \times a_{33}^{(2)}$

$= 4 \times (1/2) \times (-81/2) = -81$ ✓

$\Sigma = 6$ pts

3/4

Problème 4 :

1) Conditions de convergence, $|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|$ ✓

Elle n'est pas vérifiée pour la deuxième ligne
car $|2| \not> |3|+|6|$, on permute les lignes 2 et 3 ✓

$L_2 \rightleftarrows L_3 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 1 & 6 \\ 2 & 5 & 2 & 14 \\ 3 & 2 & 6 & 16 \end{array}\right]$ ✓

Donc $|4| > |2|+|1|$ ✓
$|5| > |2|+|2|$ ✓
$|6| > |3|+|2|$ ✓

2) Écrire le système sous la forme $x = Tx + S$. ✓

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{4}\left[6 - 2x_2 - x_3\right] \\ x_2 = \frac{1}{5}\left[14 - 2x_1 - 2x_3\right] \\ x_3 = \frac{1}{6}\left[16 - 3x_1 - 2x_2\right] \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -2/4 & -1/4 \\ -2/5 & 0 & -2/5 \\ -3/6 & -2/6 & 0 \end{bmatrix}}_{T} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 6/4 \\ 14/5 \\ 16/6 \end{bmatrix}}_{S}$$

3) Si $x^{(0)} = (0.5, 1, 1)$ et $\varepsilon = 10^{-2}$, Calculons la solution avec deux chiffres après la virgule

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{4}\left[6 - 2x_2^{(k)} - x_3^{(k)}\right] \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{5}\left[14 - 2x_1^{(k+1)} - 2x_3^{(k)}\right] \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{6}\left[16 - 3x_1^{(k+1)} - 2x_2^{(k+1)}\right] \end{cases}$$ ✓

$k=0$ $\begin{cases} x_1^{(1)} = 0{,}75 \quad |x^{(1)} - x^{(0)}| > \varepsilon \\ x_2^{(1)} = 2{,}10 \\ x_3^{(1)} = 1{,}59 \end{cases}$ ✓

$k=1$ $\begin{cases} x_1^{(2)} = 0{,}05 \quad |x^{(2)} - x^{(1)}| > \varepsilon \\ x_2^{(2)} = 2{,}14 \\ x_3^{(2)} = 1{,}93 \end{cases}$ ✓

$k=2$ $\begin{cases} x_1^{(3)} = -0{,}05 \quad |x^{(3)} - x^{(2)}| > \varepsilon \\ x_2^{(3)} = 2{,}05 \\ x_3^{(3)} = 2{,}01 \end{cases}$ ✓

$k=3$ $\begin{cases} x_1^{(4)} = -0{,}03 \quad |x^{(4)} - x^{(3)}| > \varepsilon \\ x_2^{(4)} = 2{,}01 \\ x_3^{(4)} = 2{,}01 \end{cases}$ ✓

$k=4$ $\begin{cases} x_1^{(5)} = -0{,}01 \quad |x^{(5)} - x^{(4)}| > \varepsilon \\ x_2^{(5)} = 2{,}00 \\ x_3^{(5)} = 2{,}01 \end{cases}$ ✓

$k=5$ $\begin{cases} -0{,}00 \quad |x^{(6)} - x^{(5)}| \\ 2{,}00 \\ 2{,}00 \end{cases}$ ✓

La solution est $(0{,}00, 2, 2)$. Σ = 6pts. 4/4