Schéma des différences centrées et problèmes de convection - diffusion :

Conservation : Le schéma aux différences centrées (DC) utilise des expressions consistantes pour évaluer les flux convectifs et diffusifs aux faces des volumes de contrôle ; la discussion a montré que ce schéma est conservatif.

limitation :

(1) les coefficients de l'équation de discrétisation pour les nœuds internes sont :

$$a_W = D_w + \frac{F_w}{2}$$

$$a_E = D_e - \frac{F_e}{2}$$

$$a_P = a_W + a_E + (F_e - F_w)$$

Pour le cas stationnaire $F_e - F_w = 0$ (satisfaction de l'équation de continuité) ce qui donne :

$a_P = a_W + a_E$

le critère de limitation $\frac{\sum |a_{nb}|}{|a_P'|} \leq 1$ est satisfait.

(2) Avec $a_E = D_e - F_e/2$ la contribution convective du point Est (E) est négative ; si la convection domine il est possible d'obtenir a_E négatif. Etant donné que $F_w > 0$ et $F_e > 0$ (écoulement monodimensionnel), pour que a_E soit positif D_e et F_e doivent satisfaire la condition suivante :

$$D_e - F_e/2 > 0 \Rightarrow \frac{F_e}{D_e} = Pe_e < 2$$

Pe_e est le nombre de Peclet à la face est (e).

si $Pe_e > 2$ le coefficient Est est négatif ($a_E < 0$), ce qui n'est pas consistant avec la limitation, cela donne des solutions non physiques.

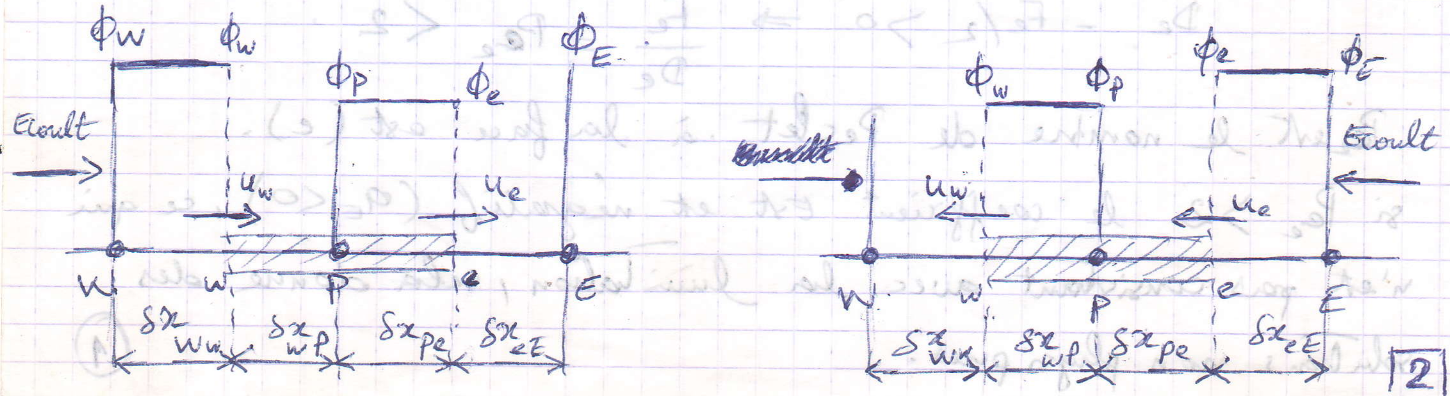
Transportivité : le SDC introduit les influences sur le noeud "P" de la part de tous les noeuds adjacents pour calculer les flux convectifs et diffusifs.
le schéma ne reconnais pas la direction du flux où la force de la convection relativement à la diffusion. il ne vérifie pas la transportivité à des Pe élevés.

Précision :

la troncature des séries de Taylor pour les SDC est du second ordre. Pour avoir des coefficients positifs, il faut que le nombre de Peclet $Pe < 2$.
On note que le nombre de Peclet pour une maille est défini pour les propriétés du fluide ρ et Γ et une propriété de l'écoulement u (vitesse) et une propriété du maillage (δx).
Pour des valeurs données de ρ et Γ, la seule possibilité de satisfaire $Pe < 2$ est d'avoir une faible vitesse, domination de la diffusion à bas nombres de Reynolds. où si le maillage est fin. Cette propriété empêche le SDC d'être souhaitable (universel).

le schéma de discrétisation AMONT (upwind)

Ce schéma reconnait le sens de l'écoulement, la valeur ~~de~~ ~~ϕ~~ convective de ϕ à la face d'une maille est égale à la valeur ~~AMONT~~ du noeud en AMONT.
la figure montre les deux cas du sens de l'écoulement.



- Lorsque l'écoulement est dans la direction positive $u_w>0, u_e>0$ $(F_w>0\ ,\ F_e>0)$. le schéma AMONT pose :

$$\phi_w = \phi_W \quad \text{et} \quad \phi_e = \phi_P.$$

et l'équation de discrétisation ~~devient~~ (***) devient :

$$F_e \phi_P - F_w \phi_W = D_e(\phi_E - \phi_P) - D_w(\phi_P - \phi_W).$$

ce qui donne :

$$(D_w + D_e + F_e)\phi_P = (D_w + F_w)\phi_W + D_e \phi_E$$

ou bien

$$\Big[\underbrace{(D_w + F_w)}_{a_W} + \underbrace{D_e}_{a_E} + (F_e - F_w)\Big]\phi_P = (D_w + F_w)\phi_W + D_e \phi_E.$$

$$a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_E \phi_E.$$

- lorsque l'écoulement est la direction négative :
$u_w<0,\ u_e<0$ $\quad (F_w<0,\ F_e<0)$, le schéma AMONT pose :

$$\phi_w = \phi_P \quad \text{et} \quad \phi_e = \phi_E$$

et l'équation de discrétisation (***) devient :

$$F_e \cdot \phi_E - F_w \cdot \phi_P = D_e(\phi_E - \phi_P) - D_w(\phi_P - \phi_W).$$

$$\underbrace{\Big[\underbrace{(D_w)}_{a_W} + \underbrace{(D_e - F_e)}_{a_E} + (F_e - F_w)\Big]}_{a_P}\phi_P = \underbrace{D_w}_{a_W} \cdot \phi_W + \underbrace{(D_e - F_e)}_{a_E} \cdot \phi_E$$

sous sa forme générale :

$$a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_E \phi_E.$$

comparaison des schémas des DC et UDC.

Schémas	a_P	a_W	a_E	Sens de l'écoulement
SDC	$a_W + a_E + (F_e - F_w)$	$D_w + F_w/2$	$D_e - F_e/2$	—
SUC	$a_W + a_E + (F_e - F_w)$	$D_w + F_w$	D_e	$F_w > 0$, $F_e > 0$.
"	$a_W + a_E + (F_e - F_w)$	D_w	$D_e - F_e$	$F_w < 0$, $F_e < 0$.

Une forme de notation pour les coefficients adjacents pour le schéma UPWIND (AMONT) couvrant les deux directions est donnée par :

a_W	a_E
$D_w + \max(F_w, 0)$	$D_e + \max(0, -F_e)$

Caractéristique du schéma AMONT (UPWIND Differencing scheme).

Conservation : le schéma AMONT est conservatif, il utilise une formulation consistante pour représenter les flux aux interfaces.

limitation : les coefficients de l'équation de discrétisation sont tjs positifs et satisfait la limitation : lorsque l'écoulement satisfait la continuité $(F_e - F_w)$ est nul ce qui donne $a_P = a_W + a_E$ qui rend la méthode stable.

La matrice est diagonalement dominante.

Transportation : le schéma tient compte de la direction de l'écoulement, ce qui fait la transportation est construite dans la formulation.

Précision : le schéma est basé sur la valeur AMONT du noeud, il est du 1er ordre.

le schéma hybride :

c'est une combinaison du schéma des différences centrées et Amont. le schéma des différences centrées qui est du second ordre est utilisé pour ($Pe < 2$) tandis que le schéma Amont, qui est du premier ordre mais qui tiens compte de la transportivité est utilisé pour des larges valeurs de Peclet ($Pe \geq 2$).

- Pour les bas nombres de Peclet ($|Pe| < 2$), on reprend le schéma des différences centrées avec les termes de convection et de diffusion.

si on considère par exemple les flux à la face ouest (w) on aura : (Flux net) : $(\rho u \cdot \phi)_w - \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_w$

$$= F_w \left(\frac{\phi_W + \phi_P}{2}\right) - D_w (\phi_P - \phi_W).$$

$$q_w = F_w \left[\frac{1}{2}\phi_W\right] + D_w \cdot \phi_W + F_w (\phi_P/2) - D_w \cdot \phi_P$$

$$= F_w \left[\frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{Pe_w}\right)\phi_W + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{Pe_w}\right)\phi_P\right]$$

tels que : $Pe_w = \frac{F_w}{D_w}$.

Pour $-2 < Pe_w < 2$

- Pour les grands nombres de Peclet $|Pe| \geq 2$.

on prend le schéma amont (sans termes de diffusion) donc pour la face w. on aura : (nombre de Peclet ≫) domination de la convection

$$q_w = F_w \phi_W \quad \text{si} \quad Pe_w \geq 2.$$

$$q_w = F_w \phi_P \quad \text{si} \quad Pe_w \leq -2.$$

L'équation générale aura la forme : $a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_E \phi_E$

les coefficients pour le schéma hybride sont donnés par :

$$a_W = \max\left[F_w , (D_w + F_w/2), 0\right].$$

$$a_E = \max\left[-F_e , (D_e - F_e/2), 0\right].$$

$$a_P = a_W + a_E + (F_e - F_w).$$

<u>Analyse du schéma hybride</u> : Ce schéma utilise les propriétés favorables des schémas Amont et centré.

il bascule sur le schéma Amont lorsque le schéma des différences centrés donne de mauvais résultats $Pe > 2$.

le schéma est conservatif, les coefficients sont Tjs positifs.

il satisfait la transportivité et produit les résultats réels

<u>Schéma hybride pour les problèmes de convection - diffusion multidimensionnels</u> :

On peut déduire facilement le schéma pour les autres directions :

$$a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_E \phi_E + a_S \phi_S + a_N \phi_N + a_B \phi_B + a_T \phi_T.$$

avec :

$$a_P = a_W + a_E + a_S + a_N + a_B + a_T + \Delta F.$$

les coefficients sont donnés par la table

	1D	2D.	3D.
a_W	$\max\left[F_w , (D_w + F_w/2), 0\right]$	$\max\left[F_w, (D_w + \frac{F_w}{2}), 0\right]$	$\max\left[F_w, (D_w + F_w/2), 0\right]$
a_E	$\max\left[-F_e, (D_e - F_e/2), 0\right].$	$\max\left[-F_e, (D_e - F_e/2), 0\right]$	$\max\left[-F_e, (D_e - F_e/2), 0\right]$
a_S		$\max\left[F_s, (D_s + F_s/2), 0\right]$	$\max\left[F_s, (D_s + \frac{F_s}{2}), 0\right]$
a_N		$\max\left[-F_n, (D_n - \frac{F_n}{2}), 0\right]$	$\max\left[-F_n, (D_n - \frac{F_n}{2}), 0\right]$
a_B			$\max\left[F_b, (D_b + F_b/2), 0\right].$
a_T			$\max\left[-F_t, (D_t - \frac{F_t}{2}), 0\right].$
ΔF	$F_e - F_w$	$F_e - F_w + F_n - F_s$	$F_e - F_w + F_n - F_s + F_t - F_b.$

les expressions de F et D sont données par :

$$\begin{cases} F_i = (\rho u)_i A_i & i = w, e, s, n, b, t. \\ D_i = \dfrac{\Gamma_i}{\delta x_{ip}} A_i \end{cases}$$

<u>le schéma à la loi de puissance :</u> ce schéma est plus précis, il donne une approximation meilleur que celle du schéma hybride. Dans ce schéma la diffusion est remise à zéro lorsque le nombre de Peclet de la cellule dépasse 10.

si $0 < Pe < 10$ le flux est évalué en utilisant un polynôme, par exemple, pour la face (West) on a :

$$q_w = F_w \left[\phi_W - \beta_w (\phi_P - \phi_W) \right] \quad \text{pour} \quad 0 < Pe < 10.$$

où $\beta_w = (1 - 0{,}1 \cdot Pe_w)^5 / Pe_w$.

et

$$q_w = F_w \phi_W \quad \text{pour} \quad Pe > 10.$$

les coefficients pour le cas 1D sont donnés par :

$$a_P = a_W + a_E + (F_e - F_w).$$

$$a_W = D_w \max \left[0, (1 - 0{,}1 |Pe_w|)^5 \right] + \max [F_w, 0].$$

$$a_E = D_e \max \left[0, (1 - 0{,}1 |Pe_e|)^5 \right] + \max [-F_e, 0].$$

les propriétés de ce schéma sont similaires à celui hybride. il est plus précis pour le cas 1D. ce schéma est très utilisé dans les cas pratiques des écoulements.