3 - Méthode des volumes finis pour les problèmes de diffusion

Introduction :

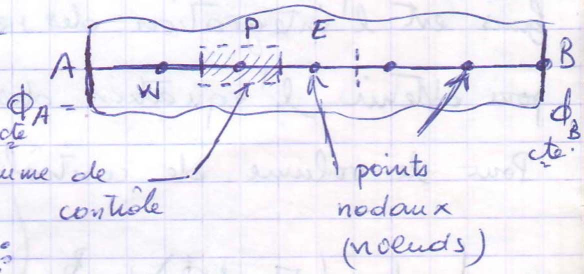
Dans ce chapitre on développe la méthode ~~des~~ numérique des volumes finis, en considérant le processus le plus simple de ~~tous les~~ transports : la diffusion pure stationnaire.

L'équation qui régit la diffusion peut être déduite facilement de l'équation générale de transport pour la propriété ϕ par la suppression (élimination) du terme transitoire et du terme convectif. ce qui donne :

$$\boxed{\operatorname{div}(\Gamma \operatorname{grad}\phi) + S_\phi = 0}$$

Cas de la diffusion monodimensionnelle :

considérons le cas de la diffusion d'une propriété ϕ dans un domaine unidimensionnel défini par la figure.



le processus est gouverné par l'équation :

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(\Gamma \frac{d\phi}{dx}\right) + S = 0.}$$

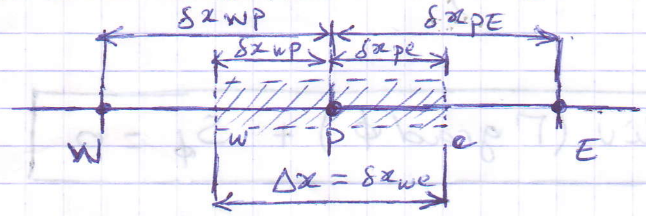
"Γ" est un coefficient de diffusion et "S" est le terme source.

les valeurs aux frontières (limites) A et B sont données par ϕ_A et ϕ_B.

Pour résoudre cette équation, on suit les étapes suivantes :

Etape 1 : Génération de maillage : la 1ère étape dans la méthode des volumes finis est de diviser le domaine en volumes de contrôles discrets. On place un nombre de nœuds dans l'espace entre "A" et "B" des limites (ou faces) des volumes de contrôle sont positionnées au milieu entre deux nœuds adjacents : Alors chaque nœud est entouré par un volume de contrôle ou cellule. les limites du domaine physique doivent coïncider avec les faces des volumes de contrôle.

Un noeud général est noté par "P" et ses adjacents dans le cas 1D, les noeuds Ouest et Est sont notés par "W" et "E". la face ouest du volume de contrôle est notée par "w" et celle Est par "e". les distances entre les noeuds "W" et "P" et entre "P" et "E", sont identifiées par "δx_{WP}" et "δx_{PE}" respectivement. similairement, les distances entre "w" et "P" et "P" et "e" sont notées par δx_{wP} et δx_{Pe} respectivement.
la largeur du volume de contrôle est $\Delta x = \delta x_{we}$



Etape 2: Discrétisation : l'étape Clé de la méthode des volumes finis est l'intégration des équations gouvernantes sur le volume de contrôle pour obtenir l'équation discrétisée à son noeud "P".
Pour le volume de contrôle défini ci-dessus, cela donne :

$$\int_{\Delta V} \frac{d}{dx}\left(\Gamma \frac{d\phi}{dx}\right) dV + \int_{\Delta V} S\, dV = \left(\Gamma . A \frac{d\phi}{dx}\right)_e - \left(\Gamma . A \frac{d\phi}{dx}\right)_w + \bar{S}\,\Delta V = 0 .$$

"A" est la section normale à la direction x. (c'est la surface de la face du volume de contrôle), "ΔV" est le volume et $\bar{S}$ est la valeur du terme source S sur un volume de contrôle.
c'est une caractéristique très intéressante de la méthode des volume finis
cette équation signifie que le flux diffusif de ϕ quittant la face "e" (est) moins le flux diffusif de ϕ entrant la face "w" (ouest) est égal à la génération de ϕ, c'est à dire, cette équation constitue un bilan de ϕ sur le volume de contrôle.

Pour trouver des formes utiles des équations discrétisées, on a besoin du coefficient "Γ" et du gradient "$\frac{d\phi}{dx}$" aux faces ("e") et ("w").

Les valeurs de Γ et de ϕ sont définis aux nœuds.

Pour calculer les gradients aux faces du volume de contrôle, une approximation de la distribution des propriétés entre les nœuds doit être utilisée. L'approximation linéaire est la plus simple et directe pour calculer les valeurs aux interfaces et les gradients. Cette pratique est dite "Différences centrées".

Dans un maillage <u>uniforme</u>, les valeurs interpolées de "Γ_e" et "Γ_w" sont données par :

$$\Gamma_w = \frac{\Gamma_W + \Gamma_P}{2} \qquad \Gamma_e = \frac{\Gamma_P + \Gamma_E}{2}$$

Les termes de diffusion sont évalués par :

$$\left(\Gamma A \frac{d\phi}{dx}\right)_e = \Gamma_e A_e \left(\frac{\phi_E - \phi_P}{\delta x_{PE}}\right)$$

$$\left(\Gamma A \frac{d\phi}{dx}\right)_w = \Gamma_w A_w \left(\frac{\phi_P - \phi_W}{\delta x_{WP}}\right)$$

Dans les situations pratiques, le terme source peut être fonction ~~dépendante~~ de la variable dépendante. Dans ce cas, l'approximation du terme source dans la méthode des volumes finis est une approximation linéaire : $\bar{S}\,\Delta V = S_u + S_p \phi_p$

En substituant ces termes dans l'équation discrétisée, on trouve

$$\Gamma_e A_e \left(\frac{\phi_E - \phi_P}{\delta x_{PE}}\right) - \Gamma_w A_w \left(\frac{\phi_P - \phi_W}{\delta x_{WP}}\right) + \left(S_u + S_p \phi_p\right) = 0$$

En réarangeant :

$$\boxed{\left(\frac{\Gamma_e}{\delta x_{PE}} A_e + \frac{\Gamma_w}{\delta x_{WP}} A_w - S_p\right)\phi_P = \left(\frac{\Gamma_w}{\delta x_{WP}} A_w\right)\phi_W + \left(\frac{\Gamma_e}{\delta x_{PE}} A_e\right)\phi_E + S_u}$$

On note les coefficients de ϕ_W et ϕ_E pour a_W et a_E, et celui de ϕ_P pour a_P. l'équation s'écrit alors :

$$\boxed{a_P \cdot \phi_P = a_W \phi_W + a_E \cdot \phi_E + S_u}$$

où $a_W = \frac{\Gamma_w}{\delta x_{WP}} \cdot A_w$ $\quad a_E = \frac{\Gamma_e}{\delta x_{PE}} \cdot A_e$ $\quad a_P = a_W + a_E - S_p$.

Cette équation représente la forme discrétisée de l'équation de la diffusion.

Etape 3 : Solution des équations :

les équations discrétisées doivent être écrite en chaque noeud du domaine de calcul afin de résoudre le problème. Pour les volumes de contrôles adjacents aux limites, l'équation de discrétisation est modifiée pour incorporer les conditions aux limites. le système linéaire est ensuite résolu pour obtenir la distribution de ϕ aux noeuds :

Exercices : Cas de la diffusion unidimensionnelle stationnaire :

On applique la méthode des volumes finis pour résoudre les problèmes simples de la diffusion traitant le transfert de chaleur conductif :

L'équation régissant le phénomène unidimensionnel de la conduction de la chaleur est :

$$\frac{d}{dx}\left(k \frac{dT}{dx}\right) + S = 0$$

k est la conductivité thermique qui prend la place de Γ et T est la température. le terme source peut être une génération de chaleur due à un courant électrique passant à travers la barre.