lois de conservation du mvt d'un fluide et conditions aux limites.

la base mathématique du modèle de l'écoulement d'un fluide et du transfert de chaleur à partir ~~à partir~~ des principes de conservation de masse, quantité de mvt et d'énergie. Cela donne les équations qui régissent le phénomène des écoulements de fluide et des transfert de chaleur.

- Equations de l'écoulement d'un fluide et transfert de chaleur :.

Les équations interprètent le principe de conservation de :

- la masse du fluide.
- le taux de variation de la quantité de mvt est égal à la somme des forces sur une particule fluide (2ème loi de Newton).
- le taux de variation de l'énergie est égal à la somme du taux d'accroissement de chaleur et du taux de travail exercé sur une particule de fluide (1ère loi de la thermodyn

le fluide est considéré comme un milieu continu. On décrit le fluide en terme de propriétés macroscopiques, comme la vitesse, la pression, la densité et la température et leurs dérivées par rapport au temps et à l'espace.

1- Conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{u}) = 0.$$

si le fluide est incompressible $\rho = c^{te} \Rightarrow \operatorname{div}(\vec{u}) = 0.$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

2- Conservation de la quantité de mvt :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho u.\vec{u}) = -\dfrac{\partial P}{\partial x} + \operatorname{div}(\mu \overrightarrow{\operatorname{grad}} u) + S_{Mx} \\ \dfrac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v.\vec{u}) = -\dfrac{\partial P}{\partial y} + \operatorname{div}(\mu \overrightarrow{\operatorname{grad}} v) + S_{My} \\ \dfrac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho w.\vec{u}) = -\dfrac{\partial P}{\partial z} + \operatorname{div}(\mu \overrightarrow{\operatorname{grad}} w) + S_{Mz} \end{cases}$$

qui sont en même temps les équations de Navier-Stokes.

3- Conservation de l'energie interne :

$$\frac{\partial(\rho i)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho i \vec{u}) = -P \operatorname{div}\vec{u} + \operatorname{div}(k \overrightarrow{\operatorname{grad}} T) + \varphi + S_i$$

ou φ est la fonction de dissipation.

$$\varphi = \mu \left\{ 2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right] + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \right\} + \lambda (\operatorname{div}\vec{u})^2$$

la fonction de dissipation est tjrs positive. et représente un terme source de l'énergie interne due au travail de déformation appliqué sur la particule fluide.

cas d'un fluide incompressible :

$i = c.T$ ou c la chaleur spécifique et T la $t°$

cela donne $\operatorname{div}\vec{u} = 0$ (équ de la conservation de la masse)

$$\rho c \frac{DT}{Dt} = \operatorname{div}(k \overrightarrow{\operatorname{grad}} T) + \varphi + S_i$$

cas d'un fluide compressible : l'équation de l'énergie est réarrangée pour donner une équation pour l'enthalpie :

$$h = i + \frac{P}{\rho} \quad \text{et} \quad h_0 = h + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2).$$

$$h_0 = i + P/\rho + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) = E + P/\rho.$$

Les formes différentielles et intégrales des équations générales de transport :

si on introduit une variable générale ϕ, la forme des équations de conservation pour tout écoulement de fluide, incluant les équations à des quantités scalaires comme la température, la concentration ... peut être écrite :

$$\boxed{\underset{(1)}{\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t}} + \underset{(2)}{div\,(\rho\phi\vec{u})} = \underset{(3)}{div\,(\Gamma\,\vec{grad}\,\phi)} + \underset{(4)}{S_\phi}}$$

veut dire :

(le taux de variation de ϕ d'un élément fluide) + (le taux net de l'écoulement de ϕ sortant de l'element fluide) = (le taux de variation de ϕ due à la diffusion) + (le taux de variation de ϕ due au terme source).

cette équation s'appelle l'équation de transport de la quantité ϕ.

(1) : le terme du taux de variation temporel.

(2) : le terme convectif.

(3) : le terme diffusif.

(4) : le terme source.

en mettant $\phi = 1, u, v, w$ et i (ou T ou h_0) on obtient les équations de conservation.

- ~~la clé~~ l'étape clé de la méthode des volumes finis est l'intégration de cette équation sur un volume de controle (CV) en trois dimensions

$$\int_{CV} \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t}\,dV + \int_{CV} div(\rho\phi\vec{u})\,dV = \int_{CV} div\,(\Gamma\,\vec{grad}\,\phi)\,dV + \int_{CV} S_\phi\,dV.$$