Université L'arbi Ben M'hidi

Faculté: Sciences exactes et sciences de la nature et de la vie
Département: MI
Année universitaire: 2021/2022
Module: Algèbre 2

Correction d'examen n^0 2

Exercice 1:(6 **pts**)
1.

$$F_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x+y+3z=0\right\}$$

i. Soient $(x,y,z)\,,\left(x^{'},y^{'},z^{'}\right)$ deux éléments de F_1. Alors,

$$\left\{\begin{array}{c} x+y+3z=0 \\ x^{'}+y^{'}+3z^{'}=0 \end{array}\right. \Rightarrow x+x^{'}+y+y^{'}+3\left(z+z^{'}\right)=0$$

donc $(x,y,z)+\left(x^{'},y^{'},z^{'}\right)=\left(x+x^{'},y+y^{'},z+z^{'}\right)\in F_1$ ....(1 **pts**)
ii. De même, $\forall\,(x,y,z)\in F_1$, $\forall\lambda\in\mathbb{R}$ on a $\lambda\,(x,y,z)=(\lambda x,\lambda y,\lambda z)\in F_1$ ....(1 **pts**)
car

$$\lambda x+\lambda y+3\lambda z=\lambda\,(x+y+3z)=0$$

alors, l'ensembles F_1 est un sous-espace vectoriel.
2.

$$F_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x+y+3z=2\right\}$$

L'ensembles F_2 n'est pas un sous-espace vectoriel car $(0,0,0)\notin F_2$................. (1 **pts**)
3.

$$F_3 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / xy=0\right\}$$

F_3 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ car il n'est pas stable par addition.
En effet, $X=(1,0)$ et $Y=(0,1)$ sont tout les deux éléments de F_3,
mais $X+Y=(1,1)$ n'est pas élément de F_3............. (1 **pts**)
4.

$$F_4 = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^3 / x=y=2z=4t\right\}$$

i. Soient $(x,y,z,t)\,,\left(x^{'},y^{'},z^{'},t^{'}\right)$ deux éléments de F_4. Alors,

$$\left\{\begin{array}{c} x=y=2z=4t \\ x^{'}=y^{'}=2z^{'}=4t^{'} \end{array}\right. \Rightarrow x+x^{'}=y+y^{'}=2\left(z+z^{'}\right)=4\left(t+t^{'}\right)$$

donc $(x,y,z)+\left(x^{'},y^{'},z^{'}\right)=\left(x+x^{'},y+y^{'},z+z^{'}\right)\in F_4$ ....(1 **pts**)

ii. De même,$\forall (x, y, z, t) \in F_4$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ on a

$$\lambda (x, y, z, t) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z, \lambda t) \in F_4 \text{........................} (1 \textbf{ pts})$$

car

$$\lambda x = \lambda y = 2\lambda z = 4\lambda t$$

alors, l'ensembles F_4 est un sous-espace vectoriel.
<u>Exercice 2:</u>(9 **pts**)

$$f (x, y, z) = (-3x - y + z, 8x + 3y - 2z, -4x - y + 2z)$$

1. Montrons que f est une application linéaire.
i. $\forall (x, y, z), \left(x', y', z'\right) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}
& f\left[(x, y, z) + \left(x', y', z'\right)\right] \\
= & f\left(x + x', y + y', z + z'\right) \\
= & \left(-3\left(x + x'\right) - \left(y + y'\right) + \left(z + z'\right), 8\left(x + x'\right) + 3\left(y + y'\right) - 2\left(z + z'\right), -4\left(x + x'\right) - \left(y + y'\right) + 2\right. \\
= & (-3x - y + z, 8x + 3y - 2z, -4x - y + 2z) + \left(-3x' - y' + z', 8x' + 3y' - 2z', -4x' - y' + 2z'\right) \\
= & f (x, y, z) + f\left(x', y', z'\right) \text{.......................} (1 \textbf{ pts})
\end{aligned}$$

ii. $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned}
f [\lambda (x, y, z)] &= f (\lambda x, \lambda y, \lambda z) \\
&= (-3\lambda x - \lambda y + \lambda z, 8\lambda x + 3\lambda y - 2\lambda z, -4\lambda x - \lambda y + 2\lambda z) \\
&= \lambda (-3x - y + z, 8x + 3y - 2z, -4x - y + 2z) \\
&= \lambda f (x, y, z) \text{................} (1 \textbf{ pts})
\end{aligned}$$

2. Déterminons une base du $\ker f$ et sa dimension.

$$\ker f = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / f (x, y, z) == (0, 0, 0)\right\} \text{.....} (0.5 \textbf{ pts})$$

donc,

$$\begin{cases} -3x - y + z = 0 \\ 8x + 3y - 2z = 0 \\ -4x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

en resolvant ce système, on obtient

$$\begin{cases} z = x \\ y = -2x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \ker f = \{(x, -2x, x) / x \in \mathbb{R}\} = \{x (1, -2, 1) / x \in \mathbb{R}\} \text{...........} (1 \textbf{ pts})$$

alors, $\{(1, -2, 1)\}$ est une base de $\ker f$ .et $dim (\ker f) = 1$............ (0.5 **pts**)

3. L'application f n'est pas injective car $\ker f \neq \{(0,0,0)\}$ .... (1 **pts**)
4. Calcul le rang de f.
D'après le th du rang , on a

$$\begin{aligned} \dim \mathbb{R}^3 &= rgf + dim\,(\ker f) \\ &\Rightarrow rgf = 3 - 1 = 2 \text{.......... (1 \textbf{pts})} \end{aligned}$$

L'application f n'est pas surjective car son image, qui est de dimension 2, est strictement incluse dans l'espace d'arrivée $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension 3. ....(1 **pts**)

5. Déterminons une base de $Im(f)$.
On a

$$\begin{aligned} Im(f) &= \left\{ f\,(x,y,z)\,/\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \right\} \text{......... (0.5 \textbf{pts})} \\ &= \{x(-3,8,-4) + y(-1,3,-1) + z(1,-2,2) \text{avec} x,y,z \in \mathbb{R}\} = vect(u_1,u_2,u_3), \text{..... (0.5 \textbf{pts})} \end{aligned}$$

où $u_1 = (-3,8,-4)$, $u_2 = (-1,3,-1)$ et $u_3 = (1,-2,2)$.

D'après la question précédente, l'application f est de rang 2. Par ailleurs, la famille (u_1,u_2) est clairement libre : c'est donc une base de $Im(f)$. ....(1 **pts**)

<u>Exercice 3:</u>(5 **pts**)

$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$,

1) $AB = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$............. (1 **pts**)

On peut pas calculer AC car le nbre de colones de $A \neq$ le nbre de lignes de$C$ ....(1 **pts**)

2) La matrice C est-elle inversible ?

$detC = 3\begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = -22 \neq 0$

donc C est inversible............(1 **pts**)

3) Déterminons C^{-1}.

$$C^{-1} = \frac{1}{detC} \begin{pmatrix} -12 & 5 & 9 \\ 2 & 1 & -7 \\ 6 & -8 & -10 \end{pmatrix}^t \Rightarrow \frac{1}{-22} \begin{pmatrix} -12 & 2 & 6 \\ 5 & 1 & -8 \\ 9 & -7 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{11} & \frac{-1}{11} & \frac{-3}{11} \\ \frac{-5}{22} & \frac{-1}{22} & \frac{4}{11} \\ \frac{-9}{22} & \frac{7}{22} & \frac{5}{11} \end{pmatrix} \text{................ (2 \textbf{pts}}$$

DR. Rezzag.S