# الاَجَابة النّموذجيّة لَامتحَان الجبر 2

## التّمرين الأَوّل

1) **[نقطتَان]** $u_1 \in vect(u_2,u_3)$ معنَاه يوجد عدَدَان حقيقيَّان $\alpha$ و $\beta$ بحيث $u_1=\alpha u_2+\beta u_3$ ومنه

$$\begin{cases} \alpha+\beta=0 \\ \alpha=1 \\ 0\beta=a \end{cases}$$ ومنه $(\alpha,\beta,a)=(1,-1,-1)$ .

2) \color رِد **[نقطتَان]** بمَا أنّ $Dim(\mathbb{R}^3)=3$ يكفي أن نبيّن أنّ الجملة $\{u_1,u_2,u_3\}$ مستقلّة.

$$\alpha u_1+\beta u_2+\gamma u_3=(0,0,0) \Rightarrow \begin{cases} \beta+\gamma=0 \\ \alpha+\beta=0 \\ 2\alpha+\gamma=0 \end{cases} \Rightarrow (\alpha,\beta,\gamma)=(0,0,0)$$ ومنه الجملة $\{u_1,u_2,u_3\}$ مستقلّة .

3) **[ نقطتَان]** رأَينَا في الجوَاب الأَوّل أنّ $0u_1+u_2-u_3$ $(0,1,-1)=u_2-u_3=$ ومنه احدَاثيَّات الشّعَاع $(0,1,-1)$ في الأَسَاس السَّابق هي $(0,1,-1)$ .

## التّمرين الثَّاني

1) **[ نقطتَان]** تبيَين أنّ $F$ ف ش ج من $\mathbb{R}^3$

2) **[ نقطتَان]** $F=\{(x,2x,3t,t):x,t\in\mathbb{R}\}=vect\{(1,2,0,0),(0,0,3,1)\}$

الجملة $\{(1,2,0,0),(0,0,3,1)\}$ مستقلّة فهي اذن أسَاس ل $F$ .

3) أ) **[ نقطة وَاحدة]** $Ker(g)=F$ .

ب) **[ نقطة وَاحدة]** حسب مبرهنة الرّتبة $4=Dim(F)+rg(g)$ ومنه $rg(g)=2$ .

ج) **[ نقطتَان]** $Ker(g)=F\neq\{(0,0,0)\}$ ومنه $g$ ليس متبَاينًا.

$Dim(Img)=rg(g)=2$ ومنه $Img=\mathbb{R}^2$ اذن $g$ غَامر.

## التّمرين الثَّالث

1) **[ نقطة وَاحدة]** تبيَين أنّ $f$ خطّيّ.

2) **[ نقطتَان]** $$f(x,y,z)=(0,0,0,) \Rightarrow \begin{cases} y-z=0 \\ z-x=0 \\ y+x=0 \end{cases} \Rightarrow (x,y,z)=(0,0,0)$$ ومنه $f$ متبَاين فهو تقَابليّ لَانّ بعد فضَاء البدء يسَاوي بعد فضَاء الوصول.

3) **[ثلَاث نقَاط]** $f(e_1)=-e_2+e_3$ و $f(e_2)=e_1+e_3$ و $f(e_3)=-e_1+e_2$ وبمَا أنّ $f^{-1}$ خطّيّ فَانّ

$$\begin{cases} -f^{-1}(e_2)+f^{-1}(e_3)=e_1 \\ f^{-1}(e_1)+f^{-1}(e_3)=e_2 \\ -f^{-1}(e_1)+f^{-1}(e_2)=e_3 \end{cases}$$ ومنه $f^{-1}(e_1)=\frac{1}{2}(-1,1,-1)$ و $f^{-1}(e_2)=\frac{1}{2}(-1,1,1)$ و

$f^{-1}(e_3)=\frac{1}{2}(1,1,1)$ اذن $f^{-1}(x,y,z)=\frac{1}{2}(-x-y+z,x+y+z,-x+y+z)$.



م. المَادّة : محمّد سعدي