الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة العربي بن مهيدي أم البواقي

كلية العلوم الدقيقة وعلوم الطبيعة والحياة **قسم الرياضيات والإعلام الآلي**

المستوى: جذع مشترك رياضيات وإعلام آلي **المادة: جبر 2** **مسؤول المادة: محمد سعدي**

حلول تمارين السلسلة رقم 4

التمرين الأول: احسب المحددات التالية :

$$D_1 = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3\times 1 - 0\times(-2) = 3.$$

ننشر المحدد D_2 وفق العمود الأول فنجد :

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -7 & 1 \\ 0 & 9 & 1 \end{vmatrix} = 1\times\begin{vmatrix} -7 & 1 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} - 0\times\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} + 0\times\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -7 & 1 \end{vmatrix} = -16,$$

ننشر المحدد D_3 وفق السطر الثاني فنجد :

$$D_3 = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 5 & -1 & 1 \\ 6 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 & 1 \\ 6 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

ثم ننشر المحدد الناتج وفق السطر الثالث فنجد :

$$D_3 = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 5 & -1 & 1 \\ 6 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 & 1 \\ 6 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (-2)(-1)\begin{vmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

وبنشر المحدد الأخير وفق السطر الثاني نجد :

$$D_3 = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 5 & -1 & 1 \\ 6 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 & 1 \\ 6 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (-2)(-1)\begin{vmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = (-2)(-1)((-1)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -16$$

التمرين الثاني:

1) احسب باستعمال طريقة ساروس محددي المصفوفتين $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 8 & 6 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 8 & 6 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 8 & 6 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = (4\times 6(-2) + 2(-1)\times 0 + 1\times 8\times 2) - (0\times 6\times 1 + 2(-1)4 + (-2)\times(8)2) = 8$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (1(-5)2 + 3(1)\times 0 - 1\times 2\times 1) - (0(-5)(-1) + 1\times 1\times 1 + 2\times 2\times 3) = -25$$

2) بما أن $\text{Det}(A) \neq 0$ فإن A قابلة للقلب

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 8 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 8 & 6 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 8 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^{t} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -10 & 6 & -8 \\ -16 & -8 & 12 \\ 16 & -8 & 8 \end{pmatrix}$$

(3

$|2A|\ 2^3|A| = 64$, $|B^t| = |B| = -25$, $|AB| = |A||B| = -200$, $|A^{-1}| = \frac{1}{\det A} = \frac{1}{8}$

التمرين الثالث: لتكن A مصفوفة مربعة مرتبتها n نسمي كثير الحدود المعرف بـ : $P(x) = \det(A - x I_n)$ بكثير الحدود المميز للمصفوفة A.

$$P(x) = \text{Det}(A - x I_4) = \begin{vmatrix} (3-x) & -1 & -1 & -2 \\ 1 & (1-x) & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -x & -1 \\ 0 & -1 & 1 & (1-x) \end{vmatrix}$$

وبالنشر وفق السطر لأول نجد:

$$\text{Det}(A - x I_4) = (3-x)\begin{vmatrix} 1-x & -1 & -1 \\ 0 & -x & -1 \\ -1 & 1 & 1-x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -x & -1 \\ 0 & 1 & 1-x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1-x & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1-x \end{vmatrix}$$

$$-2\begin{vmatrix} 1 & 1-x & -1 \\ 1 & 0 & -x \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= x(x-3)(x-1)^2 + (x-1)^2 + (x-1)^2 - 2(0) = (x-1)^3$$

التمرين الرابع : ناقش حسب قسم العدد الحقيقي a مرتبة المصفوفة : $A = \begin{pmatrix} a & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 10 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

1) تكون رتبة مصفوفة B تساوي r إذا وجد محدد غير معدوم رتبته r مستخرج من A وكان كل محدد مستخرج من A رتبته (r+1) معدوما . 2) $rg(B) \leq \min(n, p)$ حيث n عدد أسطر B و p عدد أعمدتها.

لدينا : $rg(A) \leq \min(3, 5) = 3$

المحدد غير المعدوم $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$ مستخرج من A . ومنه رتبة A أكبر من أو تساوي 2 أي رتبة A تساوي 2 أو 3.

المحددات من الرتبة 3 المستخرجة من A هي : .

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 10 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0\,, \quad \begin{vmatrix} a & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 10 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -2a, \quad \begin{vmatrix} a & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 5a\,, \quad \begin{vmatrix} a & 2 & 3 \\ 10 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 13a$$

إذا كان $a = 0$ فإن جميع المحددات من الرتبة 3 معدومة ومنه رتبة A تساوي 2 لأنه يوجد محدد مرتبته 2 مستخرج من A و غير معدوم.

إذا كان $a \neq 0$ فإنه يوجد محدد غير معدوم مستخرج من A ومنه رتبة A هي 3 .

التمرين الخامس :

حل الجملتين التاليتين باستعمال مقلوب مصفوفة : $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ y + 2z = 2 \\ 2x + 3z = 1 \end{cases}$, $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ -x + y = 4 \end{cases}$

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ -x + y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

لدينا: $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ ومنه المصفوفة قابلة للقلب ومقلوبها : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

ومنه حل الجملة يعطي بالعلاقة : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix}$.

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ y + 2z = 2 \\ 2x + 3z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

لدينا : $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -3$ ومنه المصفوفة قابلة للقلب ومقلوبها

$$\frac{1}{-3}\begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}^{T} = \begin{pmatrix} -1 & -4/3 & 2/3 \\ -1 & -1/3 & 2/3 \\ 1 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}^{t} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -4/3 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

ومنه الجملة تقبل حلا وحيدا يعطى بالعلاقة :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -4/3 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4/3 \\ 5/3 \end{pmatrix}$$

التمرين السادس :

$$\begin{cases} 2x - 3y = 6 \\ x - 3y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 6 \\ 3y = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 6 \\ y = -2/3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -2/3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y + 2z = 1 \\ x + y - z = 1 \\ x + 3y - z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y + 2z = 1 \\ -y + 4z = -1 \\ -5y + 4z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y + 2z = 1 \\ -y + 4z = -1 \\ 16z = -4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 3/4 \\ y = 0 \\ z = -1/4 \end{cases}$$

التمرين السابع :

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ -x + y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

لدينا: $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ ومنه الجملة لكرامر ولها حل وحيد

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}} = 5, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}} = 9$$

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ y + 2z = 2 \\ 2x + 3z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

لدينا : $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -3$ ومنه الجملة لكرامر ولها حل وحيد يعطى كما يلي :

$$x=\frac{\begin{vmatrix}1&-1&1\\2&1&2\\1&0&3\end{vmatrix}}{-3}=-2,\qquad y=\frac{\begin{vmatrix}1&1&1\\0&2&2\\2&1&3\end{vmatrix}}{-3}=-\frac{4}{3},\qquad z=\frac{\begin{vmatrix}1&-1&1\\0&1&2\\2&0&1\end{vmatrix}}{-3}=-\frac{5}{3}$$

$$\begin{cases}2x-3y=6\\x-3y=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}2&-3\\1&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}$$

$\begin{vmatrix}2&-3\\1&-3\end{vmatrix}=-3$ ومنه الجملة لكرامر ولها حل وحيد :

$$x=\frac{\begin{vmatrix}6&-3\\4&-3\end{vmatrix}}{-3}=2,\quad y=\frac{\begin{vmatrix}2&6\\1&4\end{vmatrix}}{-3}=-\frac{2}{3}$$

$$\begin{cases}2x+y+2z=1\\x+y-z=1\\x+3y-z=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}2&1&2\\1&1&-1\\1&3&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

لدينا : $\begin{vmatrix}2&1&2\\1&1&-1\\1&3&-1\end{vmatrix}=8\neq0$ ومنه الجملة لكرامر وتقبل حلا وحيدا.

$$x=\frac{\begin{vmatrix}1&1&2\\1&1&-1\\1&3&-1\end{vmatrix}}{8}=\frac{3}{4}\quad,\quad y=\frac{\begin{vmatrix}2&1&2\\1&1&-1\\1&1&-1\end{vmatrix}}{8}=0\quad,\quad z=\frac{\begin{vmatrix}2&1&1\\1&1&1\\1&3&1\end{vmatrix}}{8}=-\frac{1}{4}$$