الفصل 4 : المحددات وجمل المعادلات الخطية

في كل هذا الفصل يرمز E إلى ف ش على P.

4. 1. المحددات

4. 1. 1. المحددات من الرتبة 2

تعاريف:

ليكن f تطبيقا خطيا من E^2 نحو P .

- نقول إن f شكل ثنائي الخطية على E إذا كان خطيا بالنسبة لكلا المتغيرين أي أن f يحقق ما يلي :

$$\forall x_1,x_2,y \in E,\ \forall a, b \in P : f(ax_1+bx_2, y) = af(x_1, y)+bf(x_2, y)$$
$$\forall x,y_1,y_2 \in E,\ \forall a, b \in P : f(x, ay_1+by_2) = af(x, y_1)+bf(x, y_2)$$

- نقول عن الشكل ثنائي الخطية f إنه متناوب إذا كان : $\forall x,y \in E : f(x, y) + f(y, x) = 0$

مبرهنة :

ليكن f شكلا ثنائي الخطية على . لدينا التكافؤ:
f متناوب $\Leftrightarrow \forall x \in E : f(x, x) = 0$

برهان :

نفرض أن f متناوب ومنه : من أجل كل x من E لدينا : $2f(x,x) = 0$ أي $f(x,x) =0$.

لنفرض الآن أن: $f(x, x) = 0$ من أجل كل x من E ومنه من أجل كل x, y من E لدينا :

$$0 = f(x+ y, x +y) = f(x, x) + f(x, y) +f(y, x) + f(y, y) = f(x, y) +f(y, x)$$

أي أن f متناوب.

قضية :

نفرض أن بعد E يساوي 2 و $B=(e_1, e_2)$ أساس له و ليكن f شكلا ثنائي الخطية متناوبا على E.
إذا كان $x(a,b)$ و $y(c,d)$ في الأساس B فإن : $f(x, y) = (ad - bc)\, f(e_1, e_2)$.

برهان :

$$f(x,y)= f(ae_1+be_2, ce_1+de_2) = a\, f(e_1, ce_1+de_2) + b\, f(e_2, ce_1+de_2)$$
$$= acf(e_1, e_1) + adf(e_1, e_2) + bcf(e_2, e_1)+ bd\, f(e_2, e_2) = (ad - bc)\, f(e_1, e_2) .$$

مبرهنة وتعاريف :

إذا كان بعد E يساوي 2 وكان $B=(e_1, e_2)$ أساسا له فإنه يوجد شكل ثنائي الخطية متناوب على E وحيد $\det_B$ يحقق : $\det_B(e_1, e_2) = 1$ يسمى محددا من الرتبة الثانية .
وإذا كان : $x(a, b)$ و $y(c, d)$ بالنسبة للأساس B فإن : $\det_B(x, y)= ad - bc = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$.

أمثلة :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 6, \qquad \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 19, \qquad \begin{vmatrix} -1 & 9 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -23$$

مبرهنة :

نفرض أن $B=(e_1, e_2)$ أساس لـ E وليكن x, y شعاعين من E . تكون الجملة $\{x, y\}$ مستقلة إذا وفقط إذا كان $\det_B(x, y) \neq 0$.

نفرض أن الجملة $\{x, y\}$ مرتبطة أي أن أحد الشعاعين يكتب بدلالة الآخر، نفرض مثلا أن $x= ay$ ومنه

$\det_B(x, y) = \det_B(x, ax) = a \det_B(x,x) = 0$.

لنفرض الأن أن الجملة $\{x,y\}$مستقلة ولنبين أن $\det_B(x,y) \neq 0$.

بما أن بعد E يساوي 2 فإن الجملة $\{x, y\}$ أساس لـ E ومنه توجد أعداد حقيقية $a, b,$ c,d بحيث :

$$e_1 = ax + by$$

$$e_2 = cx + dy$$

ومنه $1 = \det_B(e_1, e_2) = \det_B(ax + by, cx + dy) = (ad-bc)f(x,y)$ أي أن $\det_B(x,y)$ ليس معدوما.

نتيجة :

نفرض أن ل$B=(e_1, e_2)$ أساس لـ E وليكن x, y شعاعين من E .
من أجل كل عدد جقيقي a لدينا : $\det_B(x, ay) = \det_B(ax, y) = 0$.

4. 1. 2. المحددات من الرتبة 3

تعاريف:

ليكن f تطبيقا خطيا من E^3 نحو $\mathbb{R}$.

- نقول إن f شكل ثلاثي الخطية على E إذا كان خطيا بالنسبة لكل متغير من متغيراته أي أن f يحقق ما يلي :

$$\forall x_1,x_2,y,z \in E, \forall a, b \in \mathbb{R} : f(ax_1+bx_2, y, z) = af(x_1, y)+bf(x_2, y, z)$$
$$\forall x,y_1,y_2, z \in E, \forall a, b \in \mathbb{R} : f(x, ay_1+by_2) = af(x, y_1, z)+bf(x, y_2, z)$$
$$\forall x,y,, z_1, z_2 \in E, \forall a, b \in \mathbb{R} : f(x,y , az_1+bz_2) = af(x,y, z_1)+bf(x,y, z_2)$$

- نقول عن الشكل ثلاثي الخطية f إنه متناوب إذا كان من أجل كل x, y, z من E لدينا:

$$f(x, y, z) + f(y, x, z) = 0$$
$$f(x, y, z) + f(x, z, y) = 0$$
$$f(x, y, z) + f(z, y, x) = 0$$

نتيجة :

إذا كان f شكلا ثلاثي الخطية متناوبا على E. فإن : $\forall x, y \in E : f(x, x,y) = f(x,y,x) = f(y,x,x) = 0$

قضية :

نفرض أن بعد E يساوي 3 و (e_1, e_2, e_3) أساس له و ليكن f شكلا ثلاثي الخطية متناوبا علىE.
إذا كان $x(a,b,c)$ و $y(d,e,g)$ و $z(h, i, j)$ في الأساس (e_1, e_2, e_3) فإن :
$f(x, y, z) = (aej + dic + hbg – ceh – gia – jbd) f(e_1, e_2, e_3)$.

مبرهنة وتعاريف :

إذا كان بعد E يساوي 3 وكان $B= (e_1, e_2, e_3)$ أساسا له فإنه يوجد شكل ثلاثي الخطية متناوب على E وحيد $\det_B$ يحقق : $\det_B (e_1, e_2, e_3) = 1$ يسمى محددا من الرتبة الثالثة .
وإذا كان : $x(a, b,c)$ و $y(d, e, g)$ و $z(h, i, j)$ بالنسبة للاساس (e_1, e_2, e_3) فإن :

$$\det_B (x,y, z)= aej + dic + hbg – ceh – gia – jbd = \begin{vmatrix} a & d & h \\ b & e & i \\ c & g & j \end{vmatrix}$$

طريقة "ساروس" لحساب محدد من الرتبة الثالثة :

لحساب محدد من الرتبة الثالثة بهذه الطريقة نقوم بما يلي :

1) نكتب العمودين الأول والثاني على يمين المحدد

$$\begin{vmatrix} + & + & + \\ a & d & h \\ b & e & i \\ c & g & j \\ - & - & - \end{vmatrix} \begin{matrix} a & d \\ b & e \\ c & g \end{matrix}$$

2) نضرب عناصر كل قطر نازل ببعضها ثم نجمع الناتج ونلحقه بإشارة +.

3) نضرب عناصر كل قطر صاعد ببعضها ثم نجمع الناتج ونلحقه بإشارة – .

4) قيمة المحدد هي ناتج جمع العدد ين المحصل عليهما في المرحلتين 2) و 3).

مثال :

لنحسب المحدد: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 8 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} + & + & + \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 8 & 1 & 1 \\ - & - & - \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 8 & 1 \end{matrix}$$

ومنه :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 8 & 1 & 1 \end{vmatrix} = ((1\times1\times1) + (2\times4\times8) + (3\times2\times1)) - ((8\times3\times1)+(1\times4\times1)+(1\times2\times2)) = 39.$$

مبرهنة :

نفرض أن $B=(e_1, e_2, e_3)$ أساس لـ E ولتكن x, y, z أشعة من E .
تكون الجملة $\{x, y, z\}$ مستقلة إذا وفقط إذا كان $f(x, y, z) \neq 0$.

نتيجة :

نفرض أن $B=(e_1, e_2, e_3)$ أساس لـ E ولتكن x, y, z أشعة من E .من أجل كل عدد حقيقيين a و b لدينا : $f(x, ax + bz, z) = f(ay + bz, y, z) = f(x, y, ax + by) = 0$.

حالة خاصة:

$$\begin{vmatrix} a & h & i \\ 0 & b & j \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ k & b & 0 \\ l & m & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ k & b & 0 \\ l & m & c \end{vmatrix} = abc$$

4 . 1. 3. المحدد من الرتبة n :

نسمي شكلا n – خطيا كل تطبيق n – خطي من E^n نحو الحقل P.

- يقال عن الشــكل الخطي f إنه متناوب إذا كان : $f(v_1, v_2, ...v_n) = 0$ كلما كانت $v_1, v_2, ...v_n$ غير متمايزة مثنى مثنى.
- من أجل كل شكل n خطي متناوب f لدينا:

1) إذا بدلنا بين الشعاعين v_i, v_j في العنصر $(v_1,...,v_n)$ يكون :

$$f(v_1, ...v_i,...v_j,..,...v_n) = -f(v_1,. ...v_j,...v_i,...,...v_n)$$

2) إذا أضفنا إلى شعاع من $(v_1,...,v_n)$ عبارة خطية للأشعة الأخرى فإن الصورة لا تتغير.

3) إذا كانت الأشعة $v_1,...,v_n$ مرتبطة فإن $f(v_1.,...., v_n) = 0$.

- ليكن E ‎-P فضاء شعاعيا بعده n . $B = (e_1, e_2, ... e_n)$ أساس لـ E.

نســمي تطبيقا محددا وفق الأســاس B الشــكل n - الخطي المتناوب على E والمرموز له بالرمز $\det_B$ بحيث : $\det_B (e_1, e_2, ... e_n) = 1$.

ليكن $(v_1.,...., v_n)$ عنصرا من E^n. يســمى $\det_B (v_1.,..., v_n)$ محدد الجماعة $(v_1.,...., v_n)$ بالنسبة للأساس B.

- محدد مصــــفوفة مربعة A رتبتها n هو محدد جماعة أشــعتها العمودية بالنســـبة للأساس القانوني لـ P^n ونرمز له : det A.
- E ‎-K ف ش . بعده n و 'B, B أساسان له.عندئذ لدينا :

$$\det_{B'} (v_1, v_2, ... v_n) = \det_B (v_1, v_2, ... v_n) \det_{B'} (B)$$

4 .1 . 4 خواص المحددات

- إذا كان عمودان متساويين أو أحد الأعمدة منعدما كان المحدد منعدما.

مثل : $\begin{vmatrix} 0 & -5 & 8 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 0$ ، $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & -4 \\ 2 & -7 & 2 \end{vmatrix} = 0$.

- إذا أضفنا لأحد الأعمدة عبارة خطية للأعمدة الأخرى فإن المحدد لا يتغير.

مثل :

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 4 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1-1 & 1-1 \\ -4 & 2+5 & 2-2 \\ 2 & 4+3 & 4+6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 7 & 0 \\ 2 & 7 & 10 \end{vmatrix} = 1\times 7\times 10 = 70 .$$

- A مصفوفة مربعة عندئذ :

$$\det({}^tA) = \det(A) \qquad \text{et} \qquad \det(a\,A) = a^n \det(A)\ (a \in \mathbb{P})$$

مثل :

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 9 \\ 3 & 1 & 5 & 6 \\ 8 & 5 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 8 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 8 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 5 & 6 & 8 \\ 9 & 6 & 1 & 4 \end{vmatrix} \text{ ، } \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 12 & 0 \end{vmatrix} = 4^2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \text{ ، } \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 10 & 0 & -2 \\ 6 & 18 & 4 \end{vmatrix} = 2^3 \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 5 & 0 & -1 \\ 3 & 9 & 2 \end{vmatrix}$$

- إذا كان سطران متساويان أو أحد الأسطر منعدما كان المحدد منعدما.
- إذا أضفنا لأحد الأسطر عبارة خطية للأسطر الأخرى فإن المحدد لا يتغير.
- A, B مصفوفتان مربعتان $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
- تكون A قابلة للقلب إذا وفقط إذا كان $\det A \neq 0$ ولدينا عندئذ : $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$.

- محدد تماثل داخلي f هو محدد المصفوفة المربعة المرفقة به وفق أساس كيفي ونرمز له det f.
- f تماثل داخلي و A المصفوفة المربعة المرفقة به. القضايا التالية متكافئة :

A قابلة للقلب $\det A \neq 0$ f تقابلي

نشر محدد وفق صف

ليكن $D = \det(a_{ij})$ محددا رتبته n.

نســمي محددا أصــغر ملحقا بالحد a_{ij} المحدد ذا الرتبة $n-1$ المحصــول عليه من D بحذف الصف i والعمود j ونرمز له بالرمز D_{ij}.

مــثــال : إذا كــان $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 0 \\ 9 & 6 & 5 \end{vmatrix}$ فــإن : $D_{2,1} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}, D_{2,2} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 9 & 5 \end{vmatrix}, D_{3,2} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}$.

ولدينا ما يلي:

- نشر D وفق السطر i $D = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} D_{ij}$

مثال : لننشر المحدد التالي وفق السطر الأول:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 9 \\ 3 & 1 & 5 & 6 \\ 8 & 5 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 1\times\begin{vmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 1 \\ 1 & 8 & 4 \end{vmatrix} - 3\times\begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 8 & 6 & 1 \\ 2 & 8 & 4 \end{vmatrix} + 0\times\begin{vmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 8 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} - 9\times\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 8 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 8 \end{vmatrix}$$

لننشر المحدد التالي وفق السطر الثاني :

$$\begin{vmatrix}1&5&6\\5&6&1\\1&8&4\end{vmatrix} = -5\times\begin{vmatrix}5&6\\8&4\end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix}1&6\\1&4\end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix}1&5\\1&8\end{vmatrix} = 140 - 12 - 3$$
$$= 125$$

- يمكن النشر وفق العمود $D = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} D_{ij}$

مثال :

لننشر المحدد التالي وفق العمود الثالث :

$$\begin{vmatrix}1&5&6\\5&6&1\\1&8&4\end{vmatrix} = 6\times\begin{vmatrix}5&6\\1&8\end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix}1&5\\1&8\end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix}1&5\\5&6\end{vmatrix} = 204 - 3 - 76 = 125$$

- يستحسن النشر وفق السطر أو العمود الذي به أكبر عدد من الأصفار تقليلا للحسابات.

حساب مقلوب مصفوفة مربعة قابلة للقلب باستعمال المحدد

نضع من أجل كل $i, j = 1, 2, 3,....n$ ، $C_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$. تسمى (C) المصفوفة المرافقة للمصفوفة A.

إذا كانت A مصفوفة مربعة قابلة للقلب رتبتها n فإن : $A^{-1}=\frac{1}{\det A}\left(C_{i,j}\right)^t$

- من أجل $n = 2$. $A = \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ إذا كان $ad - cb \neq 0$ فإن A قابلة للقلب و مقلوبها

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d&-c\\-b&a\end{pmatrix}^t$$

- من أجل n = 3 نضـــع $A=\begin{pmatrix} a & d & g\\ b & e & h\\ c & f & i\end{pmatrix}$ ونفرض أن det A يختلف عن 0 .

عندئذ:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} e & h\\ f & i\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} b & h\\ c & i\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b & e\\ c & f\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix} d & g\\ f & i\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & g\\ c & i\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & d\\ c & f\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix} d & g\\ e & h\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & g\\ b & h\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & d\\ b & e\end{vmatrix}\end{pmatrix}^{t}$$

4. 2. جمل المعادلات الخطية

لتكن A مصفوفة من الرتبة $(n\times p)$ و B شعاعا من P^n في هذه الفقرة سوف نتعرض لبعض طرائق حل المعادلة : AX = B حيث X شعاع من P^p .

نضع: $A=(a_{i,j})_{1\le i\le n,\,1\le j\le p}$ و $B=(b_i)_{1\le i\le n}$ و $X=(x_i)_{1\le i\le n}$.

عندئذ المعادلة AX = B تكافئ جملة المعادلات التالية :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1+a_{1,2}x_2+\cdots+a_{1,p}x_p=b_1\\ a_{1,1}x_1+a_{1,2}x_2+\cdots+a_{1,p}x_p=b_2\\ \quad\quad\quad\quad .\\ \quad\quad\quad\quad .\\ a_{1,1}x_1+a_{1,2}x_2+\cdots+a_{1,p}x_p=b_n\end{cases}$$

أمثلة :

$$\begin{cases} 2x-6y=12\\ -x+8y=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{pmatrix} 2 & -6\\ -1 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 12\\ 9\end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} -x+2y=1\\ 2x+4y-5z=0\\ 3x+7y-2z=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0\\ 2 & 4 & -5\\ 3 & 7 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}2x-6y+3z=12\\-x+8y-4z=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}2 & -6 & 3\\-1 & 8 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\9\end{pmatrix}.$$

4. 2. 1 . طريقة حذف غوص

تهدف طريقة حذف غوص إلى تحويل المعادلة AX = B إلى معادلة مكافئة A'X = B' حيث A' مصفوفة مثلثية علوية .

أمثلة :

$$\begin{cases}2x-6y=12\\-x+8y=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-6y=12\\-2x+16y=18\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-6y=12\\10y=30\end{cases}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}2 & -6\\0 & 10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}12\\30\end{pmatrix}$$

ومنه :

$$y=\frac{30}{10}=30=3,\quad x=\frac{12+6y}{2}=15.$$

$$\begin{cases}2x_1-3x_2+x_3=8\\x_1-2x_2-x_3=0\\x_1+x_2-3x_3=-9\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}2x_1-3x_2+x_3=8\\x_2+3x_3=8\\-5x_2+7x_3=26\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}2x_1-3x_2+x_3=8\\5x_2+15x_3=40\\22x_3=66\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\\0 & 5 & 15\\0 & 0 & 22\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\40\\30\end{pmatrix}.$$

يمكننا حل هذه الجملة بسهولة:

$$x_3=\frac{66}{22}=3,\quad x_2=\frac{40-15x_3}{5}=\frac{40-15(3)}{5}=-1,\quad x_1=\frac{8+3x_2-x_3}{2}=\frac{8+3(-1)-3}{2}=1.$$

4. 2. 2 . استعمال مقلوب مصفوفة

إذا كانت A مصفوفة قابلة للقلب فإن المعادلة A X = B تكافئ $X = A^{-1} B$.

أمثلة :

نعتبر الجملة $\begin{cases} 2x + 3y = -2 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$ التي تكافئ : $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

المصفوفة $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ قابلة للقلب ومقلوبها $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ (تحقق من ذلك)

ومنه حل الجملة يعطى كما يلي : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19 \\ 12 \end{pmatrix}$.

لتكن الجملة $\begin{cases} -x + y = 2 \\ -x + z = 1 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}$ المكافئة لـ $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

المصفوفة $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ قابلة للقلب ومقلوبها $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

ومنه حل الجملة هو $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/4 \\ 5/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}$.

4. 2. 3. طريقة كرامر

نعتبر الجملة المكتوبة على الشكل المصفوفي AX = B، حيث A مصفوفة مربعة من الدرجة n.

إذا كانت A قابلة للقلب فإن الجملة الموافقة للمعادلة AX=B تسمى جملة لكرامر.

من أجل كل $j \in \{1, 2, \dots n\}$ نعرف المصفوفة j المتحصل عليها بتعويض العمود رقم j للمصفوفة A بالعمود B .

أمثلة :

من أجل الجملة : $\begin{cases} 2x + 6y = 0 \\ x - 4y = 8 \end{cases}$ لدينا $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix}$

ومنه : $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}$ و $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$

من أجل الجملة : $\begin{cases} -x+2y+3z=1 \\ 3x-4y+9z=-5 \\ 6x+2y-5z=3 \end{cases}$ لدينا $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 3 & -4 & 9 \\ 6 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ و

$B = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$

ومنه : $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -5 & -4 & 9 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ ، $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 3 & -5 & 9 \\ 6 & 3 & -5 \end{pmatrix}$ ، $A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & -5 \\ 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

قضية : (قاعدة كرامر)

إذا كانت الجملة $AX = B$ لكرامر وكان $^tX = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ فإن :
$x_j = \frac{\det(A_j)}{A}$ من أجل كل $1 \leq j \leq n$

أمثلة :

من أجل الجملة : $\begin{cases} 3x+y=-5 \\ x-4y=1 \end{cases}$ لدينا $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$

لدينا $\text{Det}(A) = -13$ ومنه الجملة لكرامر ، ولدينا

$x = \frac{\begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}}{\det(A)} = -\frac{19}{13},$ $y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\det(A)} = -\frac{8}{13} = -1$

من أجل الجملة : $\begin{cases} x + 2z = 6 \\ -3x + 4y + 6z = 30 \\ -x - 2y + 3z = 8 \end{cases}$ لدينا : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ و B $= \begin{pmatrix} 6 \\ 30 \\ 8 \end{pmatrix}$

لدينا : Det(A) = 44 ومنه الجملة لكرامر ولدينا :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{6} & 0 & 2 \\ \mathbf{30} & 4 & 6 \\ \mathbf{8} & -2 & 3 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{-40}{44} = -\frac{10}{11}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \mathbf{6} & 2 \\ -3 & \mathbf{30} & 6 \\ -1 & \mathbf{8} & 3 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{72}{44} = \frac{18}{11},$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & \mathbf{6} \\ -3 & 4 & \mathbf{30} \\ -1 & -2 & \mathbf{8} \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{152}{44} = \frac{38}{11}$$