الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة العربي بن مهيدي أم البواقي

كلية العلوم الدقيقة وعلوم الطبيعة والحياة **قسم الرياضيات والإعلام الآلي**

المستوى: جذع مشترك رياضيات وإعلام آلي **المادة: جبر 2** **مسؤول المادة: محمد سعدي**

حلول تمارين السلسلة رقم 3

التمرين الأول: نعتبر المصفوفات :

$$A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 2\\ 2 & 1 & -3\\ 4 & -3 & -1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 4 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1 & 2\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1 & -2\\ 3 & -2 & -1 & -1\\ 2 & -5 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

1) نجد بعد الحساب أن $AB = AC$.

نستنتج أن غير قابلة للقلب لأنه لو فرضنا أن A^{-1} موجود لكان: $A^{-1}AB = A^{-1}AC$ أي $B=C$ وهذا تناقض.

2) $X + tra(X)A = A^2 \Rightarrow tr(X+tr(X)A)= tra(A^2) \Rightarrow tr(X) + tr(X)tra(A) = 2tr(A) \Rightarrow tr(X)= 1$.

ومنه $X = A^2 - A$.

التمرين الثاني: نضع $A= ((1, 0), (0,1))$ و $B = (1, x,x^2)$.

$f(1,0) =(2, 3)$, $f(0,1) = (4, -5)$ ومنه مصفوفة f وفق الأساس القانوني لـ P^2 هي : $M = \begin{pmatrix}2 & 4\\ 3 & -5\end{pmatrix}$.

$g(1) = (0,0), g(x)= (0,1), g(x^2) =(0,1)$ ومنه مصفوفة g وفق الأساس القانوني لـ E هي : $M'=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

مصفوفة $f\circ g$ وفق الأساسين القانونيين لـ E و P^2 هي : $MM'=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 3 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 4 & 4\\ 0 & -5 & -5\end{pmatrix}$.

التمرين الثالث: نعتبر المصفوفتين $P = \begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ و $D = \begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

❶ $$P^2 +aP +bI_2 = 0_2 \Rightarrow \begin{pmatrix}11 & 4\\ 8 & 3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}b & 0\\ 0 & b\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3a & a\\ 2a & a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}3a + b + 11 = 0\\ a + 4 = 0\\ 2a + b + 8 = 0\\ a + b3 = 0\end{cases}.$$

$$\Rightarrow a= -4 \text{ et } b=1$$

$P^2 - 4P + I_2 = 0_2$ ومنه $(4I_2 - P)P = I_2$ ومنه P قابلة للقلب ومقلوبها $P^{-1} = 4I_2 - P = \begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 3\end{pmatrix}$

❷ $A = P^{-1}DP = \begin{pmatrix}4 & 1\\ -6 & -1\end{pmatrix}$. احسب A^n.

$A^2 = PDP^{-1}A = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2p^{-1}$ $A^3 = A^2 A= PDP^{-1}A = PD^2P^{-1}PDP^{-1} = PD^2p^{-1}$

وهكذا بالتراجع نجد $A^n = P^{-1}D^nP$.

من السهل أن نثبت أن : $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ومنه : $A^n = P^{-1}D^nP = \begin{pmatrix} 3.2^n - 2 & 2^n - 1 \\ 6 - 3.2^{n+1} & 3 - 2^{n+1} \end{pmatrix}$.

❸ $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} u_{n+1} = 4u_n + v_n \\ v_{n+1} = -6u_n - v_n \end{cases}$.

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ v_{n-1} \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} u_{n-2} \\ v_{n-2} \end{pmatrix} \dots = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3.2^n - 2 & 2^n - 1 \\ 6 - 3.2^{n+1} & 3 - 2^{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2^{n+2} - 3 \\ 9 - 2^{n+3} \end{pmatrix}$$

ومنه : $\begin{cases} u_n = 2^{n+2} - 3 \\ v_n = 9 - 2^{n+3} \end{cases}$.

التمرين الرابع:

❷ نعتبر المصفوفات المربعة $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

أ/ $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ وأن $P D P^{-1} = A$.

ب/ بضرب طرفي المساواة $A = P D P^{-1}$ في A نجد : $A^2 = PDP^{-1}A = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2p^{-1}$ وهكذا نجد أن : $A^n = P D^n P^{-1}$.

لدينا: $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$ ومنه

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1+(-1)^n & 1-(-1)^n \\ 1-(-1)^n & -1+2(-1)^n & 1-(-1)^n \\ 1-(-1)^n & (-1)^n - 1 & 1 \end{pmatrix}$$

جـ /أوجد بدلالة u_0 و v_0 و w_0 عبارات الحد العام للمتتاليات (u_n) و(v_n) و (w_n) حيث : $\begin{cases} u_{n+1} = u_n - 2v_n + 2w_n \\ v_{n+1} = 2u_n - 3v_n + 2w_n \\ w_{n+1} = 2u_n - 2v_n + w_n \end{cases}$

نلاحظ أنه : $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ v_{n-1} \\ w_{n-1} \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} u_{n-2} \\ v_{n-2} \\ w_{n-2} \end{pmatrix} \dots = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$ ومنه

$$\begin{cases} u_n = u_0 + (-1+(-1)^n)v_0 + (1-(-1)^n)w_0 \\ v_n = (1-(-1)^n)u_0 + \left(-1+2(-1)^n\right)v_0 + \left(1-(-1)^n\right)w_0 \\ w_n = (1-(-1)^n)u_0 + \left((-1)^n - 1\right)v_0 + w_0 \end{cases}$$

التمرين الخامس :

❶ لدينا :

$$M(a,b,c) = a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ومنه : $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

E غير خال لأنه يحوي المصفوفة المعدومة . $0_3 = 0.I + 0.M_1 + 0.M_2$

إذا كان $M = a\,I_3+bM_1+cM_2$ و $M' = a'\,I_3+b'M_1+c'M_2$ عنصرين من E و α,β عددين حقيقيين :فإن :

$\alpha M + \beta M' = (\alpha a + \beta a')I_3 + (\alpha b + \beta b')M_1 + (\alpha c + \beta c')M_2$ عنصر من E. ومنه E فضاء شعاعي جزئي من الفضاء $M_n(IR)$.

لدينا : E مولد بـ : I_3, M_1, M_2.

$aI_3+bM_1+cM_2 = 0_3 \Rightarrow a = b = c = 0$ ومنه :(I_3, M_1, M_2) أساس لـ E ومنه بعد E هو 3.

❷ $(M_1)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M_2$ ، $M_1M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} = 2M_1$,

$M_2M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} = 2M_1$ ، $(M_2)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2M_2$,

استنتاج أن (. ,+ ,E) حلقة جزئية تبديلية من (3 ,3)M و واحدية. نعلم أن(3 ,3)M حلقة وواحدية عنصرها الحيادي بالنسبة لعملية الضرب هو I_3. إذا كان M,M' عنصرين من E فإنه $\exists a,b,c,a',b',c' \in P$ بحيث:

$M' = a'\,I_3+b'M_1+c'M_2$ و $M = a\,I_3+bM_1+cM_2$ ومنه :

$M - M' = (a - a')I_3 + (b - b')M_2 + (c - c')M_2$

$MM' = aa'I_3 + ab'M_1 + ac'M_2 + ba'I_3 + bb'M_2 + 2bc'M_1 + ca'M_2 + 2cb'M_1 + 2cc'M_2.$

ومنه $MM' = (aa' + ba' + ca')I_3 + (ab' + 2bc' + 2cb')M_1 + (ac' + bb' + ca' + cc')M_2.$

إذن : $\forall\ M, M' \in E : M - M' \in E \text{ et } MM' \in E.$

ومنه E حلقة جزئية من M(3, 3).

لدينا

$M'M = (a'a + a'b + a'c)I_3 + (b'a + 2c'b + 2b'c)M_1 + (c'a + b'b + a'c + c'c)M_2 = MM'$

لأن الجمع والضرب تبديليان في $\mathbb{R}$. ولدينا أيضا $I_3 \in M(3,3)$ ومنه E حلقة جزئية تبديلية من الحلقةM(3, 3) وواحدية.

❸ $M_1^3 = M_1^2M_1 = M_2M_1 = 2M_1$ ومنه: $M_1^3 - 2M_1 = 0_3$ وبالتالي : $M_1(M_1^2 - 2I_3) = 0$.

لدينا : $M_1^2 - 2I_3 = M_2 - 2I_3 \neq 0_3$ و $M_1 \neq 0_3$ فالحلقة تقبل قواسم للصفر فهي غير تامة وبالتالي ليست حقلا.

التمرين السادس :

❶ واضح أن التابع المعدوم عنصر من F.

ليكن $f, h \in F$ و $a, b \in \mathbb{R}$ ومنه : يوجد $\alpha, \beta, \alpha', \beta' \in \mathbb{R}$ بحيث: $h = \alpha'f_1 + \beta'f_2$, $f = \alpha f_1 + \beta f_2$

إذن من أجل كل عددين حقيقيين a, b لدينا :

$$af + bh = a(\alpha f_1 + \beta f_2) + b(\alpha' f_1 + \beta' f_2) = (a\alpha + b\alpha')f_1 + (a\beta + b\beta')f_2 \in F$$

ومنه F ف ش ج من E .

تبيين أن (f_1, f_2) أساس لـ E'. واضح من خلال تعريف F أنه مولد بالشعاعين f_1, f_2 .
نبين أن f_1, f_2 مستقلان خطيا.

$$\alpha f_1 + \beta f_2 = 0 \Rightarrow \forall\ x \in \mathbb{R}: \alpha f_1(x) + \beta f_2(x) = 0 \Rightarrow (\alpha \cos x + \beta \sin x)e^x = 0 \Rightarrow \alpha \cos x + \beta \sin x = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = \beta = 0.$$

(بأخذ x = 0 نجد $\alpha = 0$ و بأخذ $x = \frac{\pi}{2}$ نجد $\beta = 0$). ومنه f_1, f_2 مستقلان خطيا . إذن (f_1, f_2) أساس لـ F .

❷ بما أن f_1, f_2 قابلان للاشتقاق على $\mathbb{R}$ فإن $\alpha f_1, \beta f_2$ قابلان للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ومنه $f = \alpha f_1 + \beta f_2$ قابل للاشتقاق على$\mathbb{R}$.

لدينا : $f'_1 = f_1 - f_2$ ، $f'_2 = f_1 + f_2$ ومنه : $f' = \alpha f'_1 + \beta f'_2 = (\beta + \alpha)f_1 + (\beta - \alpha)f_2 \in F$

❸ ليكن $f, h \in F$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. $g(\alpha f + \beta h) = (\alpha f + \beta h)' = \alpha f' + \beta h' = \alpha g(f) + \beta g(h)$

ومنه g خطي، مصفوفة g هي M حيث : $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

❹ $\text{Ker } g = \{g \in F : g'=0\}$ ، واضح أنه لا يوجد تابع ثابت غير معدوم ينتمي إلى F ومنه $\text{Ker } g =\{0\}$ إذن g متباين وبما أن بعد E منته فإنه تقابلي.

لدينا . $\begin{cases} g(f_1) = f_1 - f_2 \\ g(f_2) = f_1 + f_2 \end{cases}$ وبما أن g^{-1} خطي فإن : $\begin{cases} f_1 = g^{-1}(f_1 - f_2) = g^{-1}(f_1) - g^{-1}(f_2) \\ f_2 = g^{-1}(f_1 + f_2) = g^{-1}(f_1) + g^{-1}(f_2) \end{cases}$ ومنه

$\begin{cases} g^{-1}(f_1) = \frac{1}{2} f_1 + \frac{1}{2} f_2 \\ g^{-1}(f_2) = -\frac{1}{2} f_1 + \frac{1}{2} f_2 \end{cases}$ ومنه مصفوفة g^{-1} هي : $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

إذا كان f عنصرا من 'E حيث $f = \alpha f_1 + \beta f_2$ وكان F تابعه الأصلي فإن :

$$F = g^{-1}(f) = g^{-1}(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha g^{-1}(f_1) + \beta g^{-1}(f_2) = \frac{\alpha - \beta}{2} f_1 + \frac{\alpha + \beta}{2} f_2 .$$

التمرين السابع : ليكن $A=(e_1, e_2, e_3)$ و $B = (e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3)$.

❶ (*) برهان أن B أساس لـ P^3 يترك للقارئ.

❷ واضح أن : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. نضع : $\begin{cases} u_1 = e_1 \\ u_2 = e_1 + e_2 \\ u_3 = e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}$ ومنه $\begin{matrix} e_1 = u_1 \\ e_2 = u_2 - u_1 \\ e_3 = u_3 - u_2 \end{matrix}$ إذن:

$Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

❸ لدينا : $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b \\ b-c \\ c \end{pmatrix}$ ومنه $u = (a-b, b-c, c)_B$.

❹ ليكن f التطبيق الخطي المعرف كما يلي : $f : P^3 \to P^3, f(x, y, z) = (-x + y + z, x - y + z, x + y - z)$

طريقة 1:

لاحظ أن عبارة f معطاة وفق الأساس A . لدينا :

$f(e_3) = e_1 + e_2 - e_3$ ، $f(e_2) = e_1 - e_2 + e_3,$ ، $f(e_1) = -e_1 + e_2 + e_3,$

ومنه :

$f(u_1) = f(e_1) = = -e_1 + e_2 + e_3 = -u_1 + u_2 - u_1 + u_3 - u_2 = -2u_1 + u_3$

$f(u_2) = f(e_1) + f(e_2) = 2e_3 = -2u_2 + 2u_3$

$f(u_3) = f(e_1) + f(e_2) + f(e_3) = e_1 + e_2 + e_3 = u_3$

مصفوفة التطبيق f وفق الأساسB هي : $M = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

طريقة 2:

مصفوفة التطبيق f وفق الأساس A هي : $N = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

باستعمال قانون تغيير الأساس : $M = QNP = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.