الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة العربي بن مهيدي أم البواقي

كلية العلوم الدقيقة وعلوم الطبيعة والحياة　　　　قسم الرياضيات والإعلام الآلي

المستوى: جذع مشترك رياضيات وإعلام آلي　　المادة: جبر 2　　مسؤول المادة: محمد سعدي

سلسلة رقم 3 : المصفوفات

ملاحظة : الأسئلة والتمارين التي تحمل العلامة (*) تترك للطلبة

التمرين الأول: نعتبر المصفوفات : $A=\begin{pmatrix}1&-3&2\\2&1&-3\\4&-3&-1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&4&1&0\\2&1&1&1\\1&-2&1&2\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2&1&-1&-2\\3&-2&-1&-1\\2&-5&-1&0\end{pmatrix}$

❶احسب AB و AC ماذا تستنتج ؟ ❷أوجد جميع المصفوفات المربعة من الدرجة 3 التي تحقق : $X + tra(X)A = A^2$.

التمرين الثاني: ليكن E فضاء كثيرات الحدود ذات درجة أقل أو تساوي 2.

نعتبر التطبيقين : $f : P^2 \to P^2 ,\ f(x, y) = (2x +4y , 3x - 5y)$ ، $g : E \to P^2 ,\ g(p)= (p(0), p(1))$.

أوجد المصفوفات المرفقة بالتطبيقات f ، g ، fog وفق الأساسين القانونيين لـ E و P^2.

التمرين الثالث: نعتبر المصفوفتين $P = \begin{pmatrix}3&1\\2&1\end{pmatrix}$ و $D = \begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}$

❶ أوجد عددين حقيقيين a و b بحيث يكون : $P^2 +aP +bI_2 = 0_2$. استنتج أن P قابلة للقلب واحسب مقلوبها.

❷ نضع : $A = P^{-1}DP$. احسب A^n.

❸ استنتج عبارة الحد العام للمتتاليتين (u_n) و(v_n) حيث $u_0=1, v_0=1$: $\begin{cases}u_{n+1} = 4u_n + v_n\\ v_{n+1} = -6u_n - v_n\end{cases}$..

(*)**التمرين الرابع :** لتكن المصفوفات $P=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&1\\1&0&1\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix}1&-2&2\\2&-3&2\\2&-2&1\end{pmatrix}$.

❶ احسب $P^3 - 3P^2 + 2P$. استنتج أن P تقبل مقلوبا P^{-1} يطلب تعيينه.

❷ أ/ تحقق أن $A = P D P^{-1}$.　　　ب/ احسب بدلالة العدد الطبيعي n : A^n.

جـ /أوجد بدلالة u_0 و v_0 و w_0 عبارات الحد العام للمتتاليات (u_n) و(v_n) و(w_n) حيث : $\begin{cases}u_{n+1} = u_n - 2v_n + 2w_n\\ v_{n+1} = 2u_n - 3v_n + 2w_n\\ w_{n+1} = 2u_n - 2v_n + w_n\end{cases}$

(*) التمرين الخامس : $M(a,b,c)$ مصفوفة معرفة كما يلي: $M(a,b,c)=\begin{pmatrix}a+c&b&-c\\b&a+2c&-b\\-c&-b&a+c\end{pmatrix}$

❶ أوجد المصفوفتين M_1, M_2 المستقلتين عن a, b, c بحيث : $M(a,b,c) = aI_3 + bM_1 + cM_2$

استنتج أن E مجموعة المصفوفات $M(a,b,c)$ عندما تتغير (a,b,c) في P^3 والمزودة بعمليتي جمع المصفوفات وضرب شعاع بعدد حقيقي هي فضاء شعاعي يطلب تعيين بعده.

❷ احسب $(M_1)^2, M_1M_2, M_2M_1, (M_2)^2$ بدلالة I_3, M_1, M_2،

استنتج أن (., +, E) حلقة جزئية تبديلية من M(3, 3) و واحدية.

❸ احسب $(M_1)^3$ واستنتج قيمة $M_1((M_1)^2 - 2I_3)$. ثم استنتج أن (., +, E) ليست حقلا.

التمرين السادس : E مجموعة التطبيقات للمجموعة P في نفسها. نسمي F مجموعة التوابع : $f = \alpha f_1 + \beta f_2$ حيث $\alpha, \beta \in P$ و $f_1(x) = e^x \cos x, \quad f_2(x) = e^x \sin x$

❶ (*) برهن أن F فضاء شعاعي جزئي من E وأن (f_1, f_2) أساس لهذا الفضاء الجزئي.
❷ بين أن كل عنصر f منF قابل للاشتقاق على P وأن $f' \in F$ (f' هو مشتقf).
❸ ليكن g تابعا معرفا من F في نفسها والذي يرفق بكل عنصر من F تطبيقه المشتق، أثبت أن g تطبيق خطي اكتب مصفوفته في الأساس (f_1, f_2).
❹ تحقق من أن g تقابلي واكتب مصفوفة g^{-1} في الأساس (f_1, f_2).
❺ ليكن f تابعا ينتمي إلىF . استنتج مما سبق تابعا أصليا للتابع f .

التمرين السابع: ليكن $A = (e_1, e_2, e_3)$ و $B = (e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3)$.
❶ (*) برهن أن B أساس لـ P^3.
❷ عين المصفوفتين P و Q حيث P مصفوفة الانتقال من A إلى B و Q مصفوفة الانتقال من B إلى A.
❸ ليكن u عنصرا من P^3 حيث : $u = (a, b, c)_A$. ما هي احداثيات u في الأساس B .
❹ليكن f التطبيق الخطي المعرف كما يلي : $f : P^3 \to P^3, f(x, y, z) = (-x + y + z, x - y + z, x + y - z)$
أوجد مصفوفة التطبيق f وفق الأساسين B بطريقتين.