الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة العربي بن مهيدي أم البواقي

كلية العلوم الدقيقة وعلوم الطبيعة والحياة **قسم الرياضيات والإعلام الآلي**

المستوى: جذع مشترك رياضيات وإعلام آلي **المادة: جبر 2** **مسؤول المادة: محمد سعدي**

حلول تمارين السلسلة رقم 2 : التطبيقات الخطية

التمرين الأول :

❶ F . $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto 2x + 3y - 2$ ليس خطيا لأن $f(0_{\mathbb{R}^2}) = f(0, 0) = -2 \neq 0_{\mathbb{R}}$.

❷ $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto (x - z, \ 2x + y)$.

من أجل كل عددين حقيقيين $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ و $(x, y, z), (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ لدينا:

$$g(\alpha(x, y,z)+\beta(x', y',z'))= f(\alpha x+\beta x', \alpha y+\beta y', \alpha z+\beta z') =(\alpha x+\beta x' - \alpha z - \beta z', \ 2\alpha x+2\beta x' + \alpha y + \beta y')$$

$$= (\alpha x - \alpha z, 2 \alpha x+ \alpha y) + (\beta x' - \beta z', 2\beta x' + \beta y')$$

$$= \alpha (x - z, 2 x+ y) + \beta (x' - z', 2x' + y')$$

$$= \alpha g(x, y, z) + \beta g(x', y',z')$$

ومنه g خطي.

$\mathrm{Ker}\, g =\{(x, y, z) \mathbb{R}^3 : (x - z, \ 2x + y)=(0,0)\} = \{(x, -2x , x) / x\in \mathbb{R}\} = \mathrm{vect}((1, -2 , 1))$ ومنه g ليس متباينا.

$\mathrm{Im}\, g = \{(x - z, 2x+y) / x, y, z\ x \in \mathbb{R} \} = \mathrm{vect}((1, 2), (0,1) ,(1 , 0)) = \mathbb{R}^2$ (لأن $(0, 1)$ و $(1, 0)$ مستقلان خطيا و $\mathrm{Im}\, g$ ف ش ج من $\mathbb{R}^2$) ومنه g غامر.

❸ $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto (x , x - y , x+y)$.

من أجل كل عددين حقيقيين $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ و $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$ لدينا:

$$g(\alpha(x, y)+\beta(x', y'))= f(\alpha x+\beta x', \alpha y+\beta y') =(\alpha x+\beta x', \ \alpha x+\beta x' - \alpha y - \beta y', \alpha x+\beta x' + \alpha y + \beta y')$$

$$=(\alpha x, \ \alpha x - \alpha y , \alpha x + \alpha y)+ (\beta x', \beta x' - \beta y', \beta x' + \beta y')$$

$$= \alpha h(x, y) + \beta h(x', y')$$

ومنه h خطي.

$\mathrm{Ker}\, h=\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, x - y, x+y) = (0, 0,0)\} = \{(0, 0, 0)\}$ ومنه h متباين.

$\text{Im } h = \{(x , x - y , x+y) : x, y \in \mathbb{R} \} = \text{vect}((1, 1, 1), (0, -1, 1))$ ومنه h ليس غامرا لأن بعد $\mathbb{R}^3$ هو 3 بينما بعد $\text{Im } h$ أقل أو يساوي 2 فالمساواة $\text{Im } h = \mathbb{R}^3$ غير ممكنة.

❹ $k : E \to \mathbb{R}, (u_n) \mapsto \lim\limits_{n\to\infty} u_n$. حيث E هو فضاء المتتاليات العددية المتقاربة.

من أجل كل متتاليتين متقاربتين (u_n) و (v_n) وكل عددين حقيقيين a, b لدينا :

$$k(a(u_n) + b(v_n)) = \lim_{n\to\infty}(au_n + bv_n) = a\lim_{n\to\infty}(u_n) + b\lim_{n\to\infty}(v_n) = ak((u_n)) + bk((v_n))$$

ومنه k خطي.

$\text{Ker } k =\{(u_n) : \lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0\}\neq\{0_{\mathbb{R}}\}$ لأنه توجد متتاليات غير معدومة تتقارب نحو الصفر ومنه k ليس متباينا.

من أجل كل عدد حقيقي a توجد متتالية تتقارب نحو a (نأخذ كمثال المتتالية الثابتة التي جميع حدودها تساوي a تتقارب نحو a) ومنه k غامر.

التمرين الثاني:

1. يترك للطالب.

2. $\text{Ker } f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (ax +by +cz) (a, b, c) = 0\}$ وبما أن $(a, b, c) \neq (0 ,0,0)$ فإن :

$\text{Ker } f = \{(x, y,z) \in \mathbb{R}^3: ax+by+cz = 0\} = \{(x, y, - (a/c) x - (b /c)y) : x, y\in \mathbb{R} \} = \text{vect}((c, 0, a), (0,c, - b)$

بما أن a ,b, c غير معدومة فإن الجملة $\{(c, 0, a), (0,c, - b)\}$ مستقلة فهي إذن أساس لـ Ker f.

$\text{Im } f = \{ (ax +by +cz) (a, b, c) : x, y, z \in \mathbb{R}\} = \text{vect}\{(a, b,c)\}$ بما أن $(a, b, c) \neq (0 ,0,0)$ فإن الجملة أساس لـ Im f.

التمرين الثالث: ليكن a عددا حقيقيا و $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ التطبيق الخطي الذي يحقق :

$f(e_1) = (1, 1, a), \quad f(e_2)= (1, a, 1) \quad\quad f(e_3) = (a, 1, 1)$

حيث : $\{e_1, e_2, e_3\}$ هو الأساس القانوني لـ $\mathbb{R}^3$.

1) من أجل كل $(x, ,y , z) \in \mathbb{R}^3$ لدينا :

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= f(xe_1+ye_2+ze_3) = xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3) \\ &= xe_1+xe_2+axe_3 + ye_1+aye_2+ye_3 + aze_1+ze_2+ze_3 \\ &= (x +y+ a z, x +ay +z, a x +y+ z) \end{aligned}$$

2) عين ker f و Im f في الحالتين :

a = 1 في هذه الحالة: $f(x, y, z) = (x+y+z, x+y+z, x+y+z)$ وهو نفسه التطبيق المدروس في التمرين السابق.

إذن : $\text{Ker } f = \text{vect}((1, 0, 1), (0,1, - 1)$ و $\text{Im } f = \text{vect}\{(1, 1,1)\}$ ورتبة f تساوي 1 .

من أجل a = – 2 : $f(x, y, z) = (x + y - 2 z, x - 2y +z, - 2 x +y +z)$

$\text{Ker } f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x + y - 2z, x - 2y + z, -2x + y + z)\}, = \{(0, 0, 0)\}$

$\text{Im } f = \{(x + y - 2z, x - 2y + z, -2x + y + z) : x, y, z \in \mathbb{R}\} = \text{vect}((1, 1, -2), (1, -2, 1), (-2, 1, 1))$

الجملة $\{(1, 1, -2), (1, -2, 1), (-2, 1, 1)\}$ مستقلة ومنه رتبة f هي 3.

3) نضع : $F = \{(-x + y + az, x + (a-2)y + z, ax + y - z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$ حيث a كيفي من $\mathbb{R}^3$.

أ. يترك للطالب.

ب. في حالة $a = 0$ لدينا :

$$F = \{(-x + y, x - 2y + z, y - z) : x, y, z \in \mathbb{R}\} = \text{vect}((-1, 1, 0), (1, -2, 1), (0, 1, -1))$$

نلاحظ أن : $(1, -2, 1) = -(-1, 1, 0) - (0, 1, -1)$ ومنه $F = \text{vect}((-1, 1, 0) (0, 1, -1))$ الجملة $\{(-1, 1, 0) (0, 1, -1)\}$ فهي أساس لـ F .

بما أن بعد F هو 2 فإن بعد مكمله بالنسبة لـ$\mathbb{R}^3$ هو 1 . ولإيجاد أساس لهذا الأخير يكفي إيجاد شعاع مستقل خطيا عن الشعاعين $(1, 1, 0)$ و $(0, 1, -1)$. الشعاع $(1, 0, 1)$ يحقق المطلوب ومنه $\{(1, 0, 1)\}$ أساس لمكمل f بالنسبة لـ$\mathbb{R}^3$.

التمرين الرابع: ليكن $\{e_1, e_2, e_3\}$الأساس القانوني لـ $\mathbb{R}^3$ و $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ تطبيقا خطيا حيث :

$$f(e_1) = e_2 + e_3, \quad f(e_2) = e_1 + e_3, \quad f(e_3) = e_1 + e_2$$

1) برهن أن f تقابلي . $f(x, y, z) = (y + z, x + z, x + y)$. بما أن f ينطلق من $\mathbb{R}^3$ ويستقر فيها فإنه يكفي إثبات أن f متباين وهذا ما نستنتجه من كون $\text{Ker } f = \{(0, 0, 0)\}$ (التحقق من هذا يترك لطالب).

تذكير : إذا كان $f \in \mathcal{L}(E, F)$ و E منتهي البعد بحيث $\text{Dim } E = \text{Dim } F$ فإن : f متباين $\Leftrightarrow$ f غامر $\Leftrightarrow$ f تقابلي.

2) بما أن f^{-1} خطي فإنه لتعيين عبارته يكفي أن نعين صور e_1, e_2, e_3 بواسطة f^{-1} .

$f(e_1) = e_2 + e_3$ و $f(e_2) = e_1 + e_2$ و $f(e_3) = e_1 + e_2$ تكافئ : $\begin{cases} f^{-1}(e_2) + f^{-1}(e_3) = e_1 \\ f^{-1}(e_1) + f^{-1}(e_3) = e_2 \\ f^{-1}(e_1) + f^{-1}(e_2) = e_3 \end{cases}$ أي

$$\begin{cases} f^{-1}(e_2) + f^{-1}(e_3) = e_1 \\ f^{-1}(e_2) - f^{-1}(e_1) = e_1 - e_2 \\ f^{-1}(e_1) + f^{-1}(e_2) = e_3 \end{cases}$$

وبحل هذه الجملة نجد : $f^{-1}(e_2) = \frac{1}{2}(e_1 + e_2 - e_3)$, $f^{-1}(e_1) = \frac{1}{2}(e_1 - e_2 + e_3)$, $f^{-1}(e_1) = \frac{1}{2}(-e_1 + e_2 + e_3)$.

$$f^{-1}(x, y, z) = \frac{1}{2}(-x + y + z, \ x - y + z, \ x + y - z)$$

3) f^{-1} تقابلي ومنه صورة ة ونواة f^{-1} هما $\mathbb{R}^3$ و $\{(0, 0, 0)\}$ على التوالي.