**الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية**

**وزارة التعليم العالي والبحث العلمي**

**جامعة العربي بن مهيدي أم البواقي**

**كلية العلوم الدقيقة وعلوم الطبيعة والحياة** **قسم الرياضيات والإعلام الآلي**

**المستوى: جذع مشترك رياضيات وإعلام آلي** **المادة: جبر 2** **مسؤول المادة: محمد سعدي**

**سلسلة رقم 2 : التطبيقات الخطية**

**ملاحظة :** الأسئلة والتمارين التي تحمل العلامة (*) تترك للطلبة

**التمرين الأول :** افحص خطية التطبيقات التالية . إذا كان التطبيق خطيا عين نواته وصورته ثم استنتج كونه غامرا أو متباينا.

❶ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto 2x + 3y - 2$ .

❷ $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto (x - y, z, 2x + y)$ .

❸ $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto (x , x - y , x+y)$ .

❹ $k : E \to \mathbb{R}, u_n \mapsto \lim_{n\to\infty} u_n$ . حيث E هو فضاء المتتاليات العددية المتقاربة.

**التمرين الثاني:** a, b,c أعداد حقيقية غير معدومة. نعتبر التطبيق : $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ حيث:

$$f(x, y,z) = (a^2x+aby +acz, abx +b^2y+bcz, acx+bcy+c^2z)$$

1. بين أن f خطي. 2. عين أساسا لكل من Im f و Ker f.

**التمرين الثالث:** ليكن a عددا حقيقيا و $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ التطبيق الخطي الذي يحقق :

$$f(e_1) = (1, 1, a), \quad f(e_2)= (1, a, 1) \quad f(e_3) = (a, 1, 1)$$

حيث : $\{e_1, e_2, e_3\}$ هو الأساس القانوني لـ $\mathbb{R}^3$.

1) احسب $f(x, y, z)$ بدلالة x, y, z من أجل كل $(x, ,y , z) \in \mathbb{R}^3$.

2) عين ker f و Im f في الحالتين : $a = 1$ ثم $a = -2$. استنتج رتبة f في كل حالة.

3) نضع : $F=\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y,z) = 2(x,y,z)\}$ حيث a كيفي من $\mathbb{R}^3$.

**(*) أ. بين أن F ف ش ج من $\mathbb{R}^3$.**

ب. في حالة $a = 0$ عين أساسا لـ F ثم عين أساسا لمكمل F بالنسبة لـ $\mathbb{R}^3$.

**التمرين الرابع:** ليكن $\{v_1, v_2, v_3\}$ أساسا لـ $\mathbb{R}^3$ و $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ تطبيقا خطيا حيث :

$$f(e_1) = e_2+e_3 , \quad f(e_2) = e_1+ e_3, \quad f(e_3) = e_1+ e_2$$

1) برهن أن f تقابلي 2) عين $f^{-1}$ التطبيق العكسي لـ f 3) ما هي صورة و ونواة $f^{-1}$.