الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة العربي بن مهيدي أم البواقي

كلية العلوم الدقيقة وعلوم الطبيعة والحياة **قسم الرياضيات والإعلام الآلي**

المستوى: جذع مشترك رياضيات وإعلام آلي **المادة: جبر 2** **مسؤول المادة: محمد سعدي**

حلول تمارين السلسلة رقم 1 : الفضاءات الشعاعية

حل التمرين الأول : نذكر بالخاصية التالية :

$$\forall x, y \in F,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} : \alpha . x + \beta . y \in F \quad \Leftrightarrow \quad (F \text{ ف ش ج من ف ش -})$$

❶ $E_1 = \mathbb{R}^3, F_1 = \{(x, y, 0) /\ \ x, y \in \mathbb{R}\}$ واضح أن: $(0, 0, 0) \in F_1$:

ليكن $(x_1, x_2, 0)$, $(y_1, y_2, 0)$ عنصرين من F_1 . من أجل كل عددين حقيقيين a, b لدينا :

$$a(x_1, x_2, 0) + b(y_1 ,y_2, 0) = (ax_1 + bx_2, ax_2 +by_2, 0) \in F_1.$$

ومنه F_1 ف ش ج.

❷ $E_2 = \mathbb{R}^3, F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ /\ 2x + 3y - z = 0\}$. لدينا : $(0, 0, 0) \in F_2$.

إذا كان (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) عنصرين من F_2 فإن : $2x_1 + 3y_1 - z_1 = 0$ و $2x_2 + 3y_2 - z_2 = 0$

من أجل كل $a, b \in \mathbb{R}$ لدينا $a.(x_1, y_1, z_1) + b.(x_2, y_2, z_2) = (ax_1+bx_2, ay_1+by_2, az_1 + b z_2)$

لدينا : $2(ax_1+bx_2)+ 3(ay_1+by_2) - (az_1 + b z_2) = a(2x_1 + 3y_1 - z_1)+ b(2x_2 + 3y_2 - z_2)$

ومنه: $a.(x_1, y_1, z_1) + b.(x_2, y_2, z_2) \in F_2$

❸ $E_3 = \mathbb{R}^3, F_3 = \{(x, y, 0) /\ \ x , y \in \mathbb{R} \text{ et } 2x + 3y = 0 \}$

نلاحظ أن : $F_3 = F_1 \cap F_2$ وبما أن F_1 و F_2 *ف ش ج من* $\mathbb{R}^3$ فإن F_3 *ف ش ج من* $\mathbb{R}^3$.

❹ $E_4 = \mathbb{R}^2, F_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 /\ \ y \geq 0\}$

إذا كان $(x, y) \in F_4$ بحيث: $y>0$ وكان a عدد حقيقيا سالبا تماما فإن: $ay<0$ ومنه $a.(x, y) \notin F_4$ إذن F_4 ليس ف ش ج من $\mathbb{R}^2$.

❺ $E_5 = \mathbb{R}^2, F_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 /\ \ y^2 - x = 0 \}$

إذا كان $(x, y) \in F_4$ فإن: $x = y^2$، لنفرض أن $x>0$ عندئذ $(-x, -y) \notin F5$ لأن $1 - x$ سالب تماما لا يمكن أن يساوي y^2. ومنه F5 ليس ف ش ج من $\mathbb{R}^2$.

❻ E_6 مجموعة التوابع التي تنطلق من $\mathbb{R}$ وتصب في $\mathbb{R}$.

1) F_6 هو مجموعة عناصر E_6 المحدودة . واضح ان التابع المعدوم عنصر من E_6.

إذا كان $f, g \in F_6$ فإنه يوجد عددان حقيقيان M و N بحيث: $\forall x \in \mathbb{R}: \ |f(x)| < M \ \ et \ \ |g(x)| < N$

ليكن a و b عددان حقيقيان، نضع : $h = af + bg$ ومنه

$\forall x \in \mathbb{R}: \ |h(x)| \leq |a||f(x)| + |b||g(x)| < |a|M + |b|N.$

ومنه h محدود أي $af + bg \in F_6$.

2) $F_6 = \{ f \in E_6 : f(0) = 5 \}$. التابع المعدود ليس عنصرا من F_6 فهو ليس ف ش ج من E_6..

3) $F_6 = \{ f \in E_6 : f(0) = 0 \}$. لدينا التابع المعدوم عنصر من F_6.

ليكن $f, g \in F_6$ ومنه $f(1) = g(1) = 0$. ليكن a و b عددان حقيقيان، نضع : $h = af + bg$ ومنه

$h(1) = af(1) + bg(1) = 0.$ إذن $af + bg \in F_6$.

❼ E_7 مجموعة كثيرات الحدود ذات متغير حقيقي ومعاملات حقيقية.

1) F_7 مجموعة كثيرات الحدود ذات متغير حقيقي ومعاملات ناطقة. ومنه كثير الحدود المعدوم عنصر من E_7.

إذا كان $p(x) = x$ فإن $p \in F_7$ و $\sqrt{2}p \notin F_7$ ومنه F_7 ليس ف ش ج من E_7.

2) F_7 مجموعة كثيرات الحدود ذات متغير حقيقي ودرجتها تساوي 4.

نضع : $p(x) = x^4 + x$ و $q(x) = -x^4$. لدينا $p, q \in F_7$ و $p + q \notin F_7$ ومنه F_7 ليس ف ش ج من E_7.

3) F_7 مجموعة كثيرات الحدود ذات متغير حقيقي ودرجتها أقل أو تساوي 2 ومنه كثير الحدود المعدوم عنصر من E_7.

إذا كان $p, q \in F_7$ فإنه توجد أعداد حقيقية $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ بحيث:

$\forall x \in \mathbb{R}: \ p(x) = a_1 + a_2x + a_3 x^2 \ \ et \ \ q(x) = b_1 + b_2x + b_3 x^2$

من أجل كل عددين حقيقيين c, d لدينا :

$\forall x \in \mathbb{R}: \ (cp+dq)(x) = (ca_1 + d b_1) + (ca_2 + db_2)x + (ca_3 + db_3) x^2$

ومنه: $cp+dq \in F_7$.

التمرين الثاني:

$F_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x - y = 0\} = \{(x, 2x) : x \in \mathbb{R} \} = \{ x(1, 2) : x \in \mathbb{R} \}$

و منه F_1 مولد بالشعاع غير المعدوم $(1, 2)$ إذن بعد F_1 هو 1 و $\{(1, 2)\}$ أساس له.

$F_2 = \{(x, -x, x) : x \in \mathbb{R} \} = \{x(1, -1, 1) : x \in \mathbb{R}\}$

و منه F_2 مولد بالشعاع غير المعدوم $(1, -1, 1)$ إذن بعد F_2 هو 1 و $\{(1, -1, 1)\}$ أساس له.

$F_3 = \{(0, y, z) : x, y \in \mathbb{R} \} = \{y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1) : y, z \in \mathbb{R}\}$

و منه F_3 مولد بالشعاعين المستقلين خطيا $(0, 1, 0), (0, 0, 1)$ إذن بعد F_3 هو 2 و $\{(0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ أساس له.

$F_4 = \{(x, 2x + z, z) : x, z \in \mathbb{R}\} = \{x(1, 2, 0) + z(0, 1, 1) : x, z \in \mathbb{R}\}$

و منه F_4 مولد بالشعاعين المستقلين خطيا $(1, 2, 0), (0, 1, 1)$ إذن بعد F_4 هو 2 و $\{(1, 2, 0), (0, 1, 1)\}$ أساس له.

$F_5 = \{(z, y, z, 3z - y) : y, z \in \mathbb{R}\} = \{z(1, 0, 1, 3) + y(0, 1, 0, -1) : y, z \in \mathbb{R}\}$

و منه F_5 مولد بالشعاعين المستقلين خطيا $(1, 0, 1, 3), (0, 1, 0, -1)$ إذن بعد F_5 هو 2

و $\{(1, 0, 1, 3), (0, 1, 0, -1)\}$ أساس له.

التمرين الثالث:

1) $u_3 \in vect\{u_1, u_2\} \Longrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} : u_3 = \alpha u_1 + \beta u_2 \Longrightarrow (0, a, 8) = (2\alpha + 2\beta, 3\alpha + 6\beta, 4\beta)$

ومنه : $\beta = 2$ و $\alpha = -2$ و $a = 6$.

2) أ) بين أن الأشعة $v_1 = (0, 1, -2), v_2 = (1, 1, 0), v_3 = (-2, 0, -2)$ تشكل أساسا لـ $\mathbb{R}^3$.

$av_1 + bv_2 + cv_3 = (0, 0, 0) \Longrightarrow (b - 2c, a + b, -2a - 2c) = (0, 0, 0) \Longrightarrow a = b = c = 0$

ومنه $\{v_1, v_2, v_3\}$ جملة مستقلة وبما أن بعد $\mathbb{R}^3$ يساوي 3 فإنها أساس له.

ب) إحداثيات v_1 في الأساس $\{v_1, v_2, v_3\}$ هي $(1, 0, 0)$.

إحداثيات v_2 في الأساس $\{v_1, v_2, v_3\}$ هي $(0, 1, 0)$.

إحداثيات v_4 في الأساس $\{v_1, v_2, v_3\}$ هي $(2, -1, 5)$.

إحداثيات v_5 في الأساس $\{v_1, v_2, v_3\}$ هي $(1, 0, -3)$.

لنبحث عن اعداد حقيقية a, b, c بحيث : $v_6 = av_1 + bv_2 + cv_3$.

$v_6 = av_1 + bv_2 + cv_3 \Longrightarrow (-1, 2, 0) = (b - 2c, a + b, -2a - 2c) \Longrightarrow a = -1, b = 3, c = 1.$

إحداثيات v_6 في الأساس $\{v_1, v_2, v_3\}$ هي $(-1, 3, 1)$.

التمرين الرابع : ليكن E فضاء كثيرات الحدود ذات درجة أصغر أو تساوي 2.

1) بعد E هو 3 أساسه القانوني هو $\{1, x, x^2\}$.

2) لتكن a, b, c أعدادا حقيقية. $ap_0 + bp_1 + cp_2 = 0 \Longrightarrow \forall x \in \mathbb{R} : a + (b - c)x + cx^2 = 0 \Longrightarrow a = b = c = 0$

ومنه الجملة $\{p_0, p_1, p_2\}$ مستقلة خطيا *وبما أن بعد* E *يساوي 3 فإنها أساس لـ* E .

3) p العنصر من E احداثياته $(0, 1, 1)$ في الأساس القانوني لـ E ومنه . $p(x) = x + x^2 = 2x + x(x-1)$ أي
احداثيات p في الأساس $\{p_0, p_1, p_2\}$ هي $(0, 2, 1)$

$$4) \sum_{i=0}^{\infty}\frac{n+n^2}{n!}=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{2n+n(n-1)}{n!}=2\sum_{i=1}^{\infty}\frac{n}{n!}+\sum_{i=2}^{\infty}\frac{n(n-1)}{n!}=2\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}+\sum_{i=2}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!}=3e\ .$$

التمرين الخامس : E فضاء المتتاليات الحقيقية التي تحقق العلاقة التراجعية : $u_{n+2} = a\,u_{n+1} + b\,u_n$.

1) لدينا E غير خال لأن المتتالية المعدومة عنصر منه. لتكن (u_n) و (v_n) متتاليتين من E و α, β عددين حقيقيين. نضع :

$W_n = \alpha u_n + \beta v_n$ من أجل كل عدد طبيعي n .

$w_{n+2} = \alpha\, u_{n+2} + \beta\, v_{n+2} = \alpha(a\,u_{n+1} + b\,u_n) + \beta(a\,u_{n+1} + b\,u_n) = a\,w_{n+1} + b\,w_n.$

ومنه (w_n) عنصر من E إذن E ف ش ج من فضاء المتتاليات العددية.

2) (u_n) و (v_n) عنصرين من (E) غير مرتبطين خطيا يعني أنه لا يوجد عدد حقيق k بحيث : $u_n = k\,v_n$ من أجل كل عدد طبيعي n مما يعني أن النسبة $\frac{u_n}{v_n}$ ليست ثابتة.

أ) إذا وجد عددان حقيقيان α , β بحيث $w_n = \alpha\,u_n + \beta\,v_n$ من أجل كل عدد طبيعي n فإن:

$\begin{cases} w_n = \alpha u_n + \beta v_n \\ w_{n+1} = \alpha u_{n+1} + \beta v_{n+1} \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} v_{n+1}w_n = \alpha v_{n+1}u_n + \beta v_{n+1}v_n \\ v_n w_{n+1} = \alpha v_n u_{n+1} + \beta v_n v_{n+1} \end{cases}$ أي $v_{n+1}w_n - v_n\,w_{n+1} = \alpha(v_{n+1}u_n - v_n\,u_{n+1})$

لو فرضنا أن $v_{n+1}u_n - v_n\,u_{n+1} = 0$ فإن $\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} = \frac{u_n}{v_n}$ مما يعني أن النسبة $\frac{u_n}{v_n}$ ثابتة وهو ما ينافي كون (u_n) و (v_n) مستقلين ومنه $v_{n+1}u_n - v_n\,u_{n+1} \neq 0$ مما يعني أن α , β موجودان.1

ب) (E) مولد بعنصرين مستقلين خطيا ومنه بعد (E) هو 2.

3) نفرض أن : $a^2 + 4b > 0$.

أ) إذا كانت المتتالية $u_n = r^n$ عنصرا من (E) فإن : $r^2 - a\,r - b = 0$ وبما أن مميز هذه المعادلة موجب تماما فإنها تقبل حلين r_0 و r_1 . المتتاليتان $u_n = (r_1)^n$, $v_n = (r_1)^n$ مستقلتان وبما أن بعد (E) هو 2 فإنه مولد بالمتتاليتين الهندسيتين (u_n) و (v_n).

ب) $a = 1$ و $b = 6$. حلا المعادلة $r^2 - a\,r - b = 0$ هما (-2) و 3 . ومنه (E) مولد بالمتتاليتين 3^n , $(-2)^n$

إذن : $u_n = \alpha\,3^n + \beta(-2)^n$. ومنه $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_1 = 1 \end{cases}$ أي $\begin{cases} \alpha + \beta = 2 \\ 3\alpha - 2\beta = 1 \end{cases}$. $\alpha = \beta = 1$. ومنه : $u_n = 3^n + (-2)^n$.

أوجد العنصر (u_n) من (E) علما أن $u_0 = 2, u_1 = 1$.

4) نفرض أن : $a^2 + 4b = 0$.

أ) بما أن مميز المعادلة $r^2 - ar - b = 0$ معدوم فإن لها حلا مضاعفا يساوي a/2 ومنه (u_n) عنصر من (E).

لنبين أن (v_n) عنصر من (E).

$av_{n+1} + b\,v_n = a(n+1)(a/2)^{n+1} - (a/2)^2\,n(a/2)^n = (n+2)(a/2)^{n+2} = v_{n+2}$.

بما أن (u_n) و (v_n) مستقلتان فإنهما تشكلان أساسا لـ (E).

ب) نضع : $a = 4$ و $b = -4$ أوجد العنصر (u_n) من (E) علما أن $u_0 = 1,\ u_1 = 6$

$u_n = (\alpha + \beta n)\,2^n$. ومنه $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 6 \end{cases}$ أي $\begin{cases} \alpha = 1 \\ \alpha + \beta = 3 \end{cases}$ $\alpha = 1,\ \beta = 2$. ومنه $u_n = (1+2n)\,2^n$.

5) نفرض أن : $a^2 + 4b < 0$. وليكن $r = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ أحد حلي المعادلة : $r^2 - ar - b = 0$.

أ) $r^2 - ar - b = 0$ ومنه $r^{n+2} = ar^{n+1} + br^n$ إذن :

$$\rho^{n+2}(\cos(n+2)\theta + i\sin(n+2)\theta) = a\rho^{n+1}(\cos(n+1)\theta + i\sin(n+1)\theta) + b\rho^n(\cos(n)\theta + i\sin(n)\theta)$$

بالمطابقة نجد: $\rho^{n+2}\cos(n+2)\theta = a\rho^{n+1}\cos(n+1)\theta + b\,\rho^n\cos(n)\theta$

و $\rho^{n+2}\sin(n+2)\theta = a\rho^{n+1}\sin(n+1)\theta + b\,\rho^n\sin(n)\theta$

ومنه : (u_n) و (v_n) عنصران من (E) . بما أن (u_n) و (v_n) مستقلان خطيا فإنهما تشكلان أساسا لـ (E).

ب) a = 3 و b= – 9 ومنه $r = 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$

$u_n = \alpha 3^n\cos\left(n\frac{\pi}{3}\right) + \beta 3^n\sin\left(n\frac{\pi}{3}\right)$ ، $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = -3 \end{cases}$ أي ومنه $\begin{cases} \alpha = 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\beta = -\frac{3}{2} \end{cases}$ إذن $\alpha = 1, \beta = -\sqrt{3}$

$$u_n = 3^n\left(\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) - \sqrt{3}\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right)$$

التمرين السادس :

1) يترك للقارئ.

2) إذا كان f عنصرا من $G \cap F$ فإن f زوجي وفردي في نفس الوقت ومنه f معدوم أي $G \cap F = \{0\}$.

ليكن f ∈ E من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $f(x) = \underbrace{\frac{f(x) + f(-x)}{2}}_{f_1(x)} + \underbrace{\frac{f(x) - f(-x)}{2}}_{f_2(x)}$

واضح أن : $f_1 \in F$ و $f_2 \in G$ ومنه F و G متكاملان.