الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة العربي بن مهيدي أم البواقي

كلية العلوم الدقيقة وعلوم الطبيعة والحياة **قسم الرياضيات والإعلام الآلي**

المستوى: جذع مشترك رياضيات وإعلام آلي **المادة: جبر 2** **مسؤول المادة: محمد سعدي**

سلسلة رقم 1 : الفضاءات الشعاعية

ملاحظة هامة : الأسئلة والتمارين التي تحمل العلامة (*) تترك للطلبة. نهتم فقط بفضاءات شعاعية على الحقل $\mathbb{R}$.

التمرين الأول : في كل حالة مما يلي، هل F_i ف ش ج من E_i.

❶ $E_1 = \mathbb{R}^3, F_1 = \{(x, y, 0) / \ x, y \in \mathbb{R}\}$ ❷ $E_2 = \mathbb{R}^3, F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 2x + 3y - z = 0\}$

❸ $E_3 = \mathbb{R}^3, F_3 = \{(x, y, 0) / \ x, y \in \mathbb{R} \text{ et } 2x + 3y = 0\}$

❹ $E_4 = \mathbb{R}^2, F_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \ y \geq 0\}$ ❺ $E_5 = \mathbb{R}^2, F_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \ y^2 - x = 0\}$

(*) ❻ E_6 مجموعة التوابع التي تنطلق من $\mathbb{R}$ وتصب في $\mathbb{R}$.

1) F_6 هو مجموعة عناصر E_6 المحدودة **2)** $F_6 = \{f \in E_6 : f(0) = 5\}$ **3)** $F_6 = \{f \in E_6 : f(1) = 0\}$

(*) ❼ E_7 مجموعة كثيرات الحدود ذات متغير حقيقي ومعاملات حقيقية.

1) F_7 مجموعة كثيرات الحدود ذات متغير حقيقي ومعاملات ناطقة.

2) F_7 مجموعة كثيرات الحدود ذات متغير حقيقي ودرجتها تساوي 4.

3) F_7 مجموعة كثيرات الحدود ذات متغير حقيقي ودرجتها أقل أو تساوي 2.

التمرين الثاني: عين البعد و أساسا كل من الفضاءات التالية :

$F_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x - y = 0\}$ **(*)** $F_2 = \{(x, -x, x) : x \in \mathbb{R}\}$, **(*)** $F_3 = \{(0, y, z) : x, y \in \mathbb{R}\}$

$F_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y + z = 0\}$, $F_5 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y + z - t = 0 \text{ et } x - z = 0\}$

التمرين الثالث: 1) نعتبر الأشعة $u_1 = (2, 3, 0), u_2 = (2, 6, 4), u_3 = (0, b, 8), a \in \mathbb{R}$.

عين قيم a حتى يكون $u_3 \in vect\{u_1, u_2\}$.

2) أ) بين أن الأشعة $v_1 = (0, 1, -2), v_2 = (1, 1, 0), v_3 = (-2, 0, -2)$ تشكل أساسا لـ $\mathbb{R}^3$.

ب) ما هي إحداثيات الأشعة $v_6 = (-1, 2, 0)$, $v_5 = v_1 - 2v_3$, $v_4 = 2v_1 - v_2 + 5v_3$, v_1, v_2, v_3,

في الأساس $\{v_1, v_2, v_3\}$.

أقلب الصفحة من فضلك

التمرين الرابع : ليكن E فضاء كثيرات الحدود ذات درجة أصغر أو تساوي 2.

1) حدد بعد E والأساس القانوني له.

2) نضع : $p_0 = 1,\ p_1 = x,\ p_2 = x(x-1)$. بين أن الجملة $\{p_0, p_1, p_2\}$ أساس لـ E .

3) ليكن p العنصر من E الذي احداثياته $(0, 1, 1)$ في الأساس القانوني لـ E . حدد احداثيات p في الأساس $\{p_0, p_1, p_2\}$.

4) استنتج قيمة : $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{n+n^2}{n!}$ علما أن : $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$.

التمرين الخامس : ليكن E فضاء المتتاليات الحقيقية التي تحقق العلاقة التراجعية : $u_{n+2} = a\,u_{n+1} + b\,u_n$.

1) بين أن E ف ش ج من فضاء المتتاليات الحقيقية.

2) ليكن (u_n) و (v_n) عنصرين من E غير مرتبطين خطيا.

أ) بين أن كل عنصر (w_n) من E يكتب كمزج خطي للشعاعين (u_n) و (v_n) .

ب) استنتج بعد (E).

3) نفرض أن : $a^2 + 4b > 0$.

أ) بين أن E مولد بمتتاليتين هندسيتين يطلب تعيين أساسيهما.

ب) نضع : $a = 1$ و $b=6$ أوجد العنصر (u_n) من (E) علما أن $u_0 = 2,\ u_1 = 1$.

(*) 4) نفرض أن : $a^2 + 4b = 0$.

أ) بين أن (E) مولد بالمتتاليتين $u_n = (a/2)^n$ و $v_n = n(a/2)^n$.

ب) نضع : $a = 4$ و $b = -4$ أوجد العنصر (u_n) من (E) علما أن $u_0 = 1,\ u_1 = 6$

(*) 5) نفرض أن : $a^2 + 4b < 0$. وليكن $r = \rho(\cos\theta + i \sin\theta)$ أحد حلي المعادلة : $r^2 - ar - b = 0$.

أ) بين أن (E) مولد بالمتتاليتين $u_n = \rho^n \cos n\,\theta$ و $v_n = \rho^n \sin n\,\theta$.

ب) نضع : $a = 3$ و $b = -9$ أوجد العنصر (u_n) من (E) علما أن $u_0 = 1,\ u_1 = -3$.

التمرين السادس : ليكن E فضاء التوابع التي تنطلق من $\mathbb{R}$ وتصب في $\mathbb{R}$. نضع :

$$F = \{ f \in E :\ \forall x \in \mathbb{R} : f(-x) = f(x) \} \quad et \quad G = \{ f \in E :\ \forall x \in \mathbb{R} : f(-x) = -f(x) \}$$

(*) 1) بين أن F و G فضاءان شعاعيان جزئيان من E .

2) أثبت أن F و G متكاملان.