FEUILLE DE TD (Opérateurs linéaires compacts)

Exercice 1 *Dans l'espace de Hilbert $L^2([-1,1],\mathbb{C})$, on considère l'opérateur T défini par :*

$$(Tx)(t)=\int_{-1}^{1}(t-s)x(s)ds, \qquad t\in[-1,1].$$

Montrer que $T\in\mathcal{L}(H)$, puis qu'il est compact.

Exercice 2 *Soit a et b deux nombres réels tels que $a<b$, et soit $k:[a,b]^2\to\mathbb{R}$ une fonction continue. Pour toute fonction f dans $C([a,b])$ on pose*

$$(T_kf)(x)=\int_a^b k(x,y)f(y)dy, \qquad x\in[a,b]. \tag{1}$$

On dira que T_k est un opérateur intégral de noyau k.

Utiliser le théorème d'Ascoli-Arzelà pour montrer que l'opérateur $T_k: C([a,b])\to C([a,b])$ est compact.

Exercice 3 *Montrer que l'opérateur intégral T_k défini dans l'exercice précédent par la relation (1) est compact de $L^2([a,b])$ dans lui-même.*

Exercice 4 *On considère de nouveau l'opérateur linéaire intégral T_k défini formellement par la relation (1), où on suppose cette fois-ci que le noyau k est dans $L^2([a,b]^2)$, i.e.*

$$\int_a^b\int_a^b |k(x,y)|^2\,dydx<\infty.$$

Dans ce cas, T_k est appelé opérateur intégral de Hilbert-Schmidt.

En approximant k par des fonctions continues, montrer que T_k est compact de $L^2([a,b])$ dans $L^2([a,b])$.

Exercice 5 *Soient a et b deux réels tels que $a<b$ et $k\in C([a,b]^2)$. Soient également α et β des fonctions continues de $[a,b]$ dans $[a,b]$. Si $f\in C([a,b])$ et $x\in[a,b]$, on pose*

$$(Af)(x)=\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)}k(x,y)f(y)dy.$$

Montrer que l'opérateur A ainsi défini de $C([a,b])$ dans lui-même est compact.