ملخص في التوزيعات [جزء 1]

تمهيد: من المعروف أن "دالة ديراك" لها العديد من التطبيقات في الفيزياء، خاصة في الكهرومغناطيسية والجاذبية.

س: لكن كيف نعرف هذه الدالة؟

جواب: نعرف دالة ديراك (أو الدالة δ) بـ:

$$\begin{cases} \delta(x) = 0 \ ; \quad \forall x \in \mathbb{R}^* \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\, dx = 1 \end{cases}$$

أي هي تلك الدالة التي تنعدم في كل مكان باستثناء نقطة المبدأ حيث تأخذ قيمة كبيرة عند 0، وكذلك تكاملها على المجموعة $\mathbb{R}$ مساوي للصفر، وهذه الأخيرة مستحيلة رياضيا. حيث أنه من المعروف أن تكامل دالة منعدمة في كل مكان (شبه كليا) مساويا للصفر. إذن "دالة ديراك" ليست دالة بالمفهوم العادي المعروف!!! إذن ماذا تكون؟

* دعنا نأخذ المتتالية العددية التالية:

$$\varphi_j(x) = j\,\frac{\varphi(jx)}{\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, dx} \quad (I)$$

حيث:

$$x \in \mathbb{R} \longmapsto \varphi(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-\|x\|^2}} & : \|x\| < 1 \\ 0 & : \|x\| \geq 1 \end{cases}$$

لدينا:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_j(x)\,dx = \frac{j}{\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\,dx}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(jx)\,dx$$

$$(y=jx)$$

$$= 1$$

إذن: $\lim_{j\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_j(x)\,dx = 1$

يبدو أن دالة ديراك، هي نهاية متتالية لتوابع (φ_j) لكن هذه النهاية لا تنتمي الى فضاء التوابع العادية للمبرهنات المذكورة سابقا، لهذا وجب تعريف مجموعة أوسع، والتي سماها العالم الفرنسي لوران شوارتز "توابع". وأطلق عليها اسم "التوابع أو الدوال المعممة" أو "التوزيع".

مبرهنات ونتائج أساسية:

رموز:

$$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_N)\in\mathbb{N}^N$$

$$x=(x_1,x_2,\dots,x_N)\in\mathbb{R}^N$$

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\dots x_N^{\alpha_N}$$

$|\alpha| = \sum_{i=1}^{N}\alpha_i$ طول α.

$\alpha\in\mathbb{N}^N$ ، $\alpha! = \alpha_1!\,\alpha_2!\dots\alpha_N!$

$$C_\alpha^\beta = \binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!\,(\alpha-\beta)!} \quad , \alpha_i \geq \beta_i \ , \forall i .$$

$$\beta \leq \alpha \iff \beta_i \leq \alpha_i \quad \forall i$$

$$(x+y)^\alpha = \sum_{\beta \leq \alpha} C_\alpha^\beta x^\beta y^{\alpha-\beta}$$

$$f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$$

$$\partial^\alpha f = D^\alpha f = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \cdots \partial_{x_N}^{\alpha_N} f(x)$$

* دستور لبينتز

$$D^\alpha (f \cdot g) = \sum_{\beta \leq \alpha} C_\alpha^\beta D^\beta f \, D^{\alpha-\beta} g$$

$$f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{C} \quad , \quad g : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{C}$$

النتائج الأساسية:

تعريف $D(\Omega)$ (فضاء التوابع الإختبارية).

Ω مفتوح من $\mathbb{R}^N$ غير خال.

$f \in D(\Omega) \iff$ ① $f \in C^\infty(\Omega)$

② $\operatorname{supp} f$ متراص.

مع $\operatorname{supp} f$ هو متمم مفتوح الإنعدام.

مفتوح الإنعدام: هو أكبر مفتوح ينعدم فيه التابع f.

أي: $\text{supp} f = \overline{\{x\in\mathbb{R}^N : f(x)\neq 0\}}$

حيث: $\overline{\{\dots\}}$ هي الملاصقة.

ملاحظة:

نرمز أيضا لـ $\mathcal{D}(\Omega)$ بـ $C_0^\infty(\Omega)$.

سؤال:

كيف نجد عناصر من $\mathcal{D}(\Omega)$ ؟

جواب:

التابع التالي:

$$\mathbb{R}^N \ni x \longmapsto g(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{1-\|x\|^2}} & : \|x\|<1 \\ 0 & : \|x\|\geq 1 \end{cases}$$

(حيث: $\|\cdot\|$ النظيم الإقليدي) تابع اختباري.

* يمكن إنشاء ما لانهاية من التوابع الإختبارية انطلاقا من هذا التابع (أنظر (I)).

إذن $\mathcal{D}(\Omega)$ غير مجموعة خالية.

* $\mathcal{D}(\Omega)$ فضاء شعاعي.

* قام "لورانت" بتعريف طبولوجيا على $\mathcal{D}(\Omega)$، مبنية على متتالية أنصاف النظيمات التالية:

$$P_{K,m}(\varphi)=\sup_{\substack{x\in K\\ |\alpha|\leq m}} |D^\alpha \varphi(x)| \quad , m=0,1,2,\dots$$

$K\subset\Omega$ متراص، $\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$

سؤال:

لماذا لم يعتمد التطبيق التالي:

$$D(\Omega)\ni\varphi\longmapsto \sup_{\substack{|k|\le m\\ x\in\Omega}}|D^k\varphi(x)|$$

نظيما على $D(\Omega)$ ؟

جواب:

يمكن ملاحظة أنّ هذا النظيم يجعل الفضاء $D(\Omega)$ غير تام، ويمكن إيجاد مثال: $\Omega=\mathbb{R}$ و $\varphi\in D(\mathbb{R})$ حيث: $\operatorname{Supp}=[0,1]$ و $\varphi>0$ في $(0,1)$، نعتبر كذلك:

$$\phi_j(x)=\sum_{m=1}^{j}\frac{1}{m}\varphi\left(x-\frac{1}{m}\right)$$

• لاحظ أنّ ϕ_j متتالية في $D(\mathbb{R})$، وكذلك هي كوشية.

• لكن نهايتها ليست في $D(\mathbb{R})$!!

← لمزيد من التفصيل للطوبولوجيا المنشأة على $D(\Omega)$ نشير مثلا الى المرجع، رقم [1]

• نشير هنا أنّ الشيء الوحيد الذي نريده من هذه الطوبولوجيا هو مفهوم التقارب في $D(\Omega)$ ؟

جواب:

$f_j \xrightarrow{D(\Omega)} f$ $\Longleftrightarrow$ ① يوجد متراص $K \subset \Omega$ بحيث:

$$\forall j \in \mathbb{N} : \operatorname{Supp} f_j \subset K$$

② $D^\alpha f_j$ متقاربة بانتظام نحو $D^\alpha f$

على K، أيّاً كان $\alpha \in \mathbb{N}^N$

$$\lim_{j \to +\infty} \underbrace{\sup_{x \in K} \left| D^\alpha f_j(x) - D^\alpha f(x) \right|}_{\text{متتالية عددية}} = 0$$

تمارين: انظر السلسلة (I).

---

* التوزيعات: **Distributions**

$$\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^N$$

يكون التطبيق: $T : D(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$, $\varphi \longmapsto T(\varphi)$ توزيعاً على Ω إذا كان خطياً ومستمراً.

هذا معناه $T \in D'(\Omega)$ (ثنوي طبولوجي لـ $D(\Omega)$).

* جرت العادة أن نرمز لصورة التوزيع بالرمز التالي:

$$T(\varphi) = \langle T, \varphi \rangle_{D', D}$$

كيف نعبر عن الاستمرار، إذا علمنا أن $D(\Omega)$ طبولوجيا التي لا نعرفها صراحة؟

تعريف (استمرار "T"):
يكون $T: \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ لخطي مستمرا (أي توزيعا)
إذا كان: من أجل كل مترا $K \subset \Omega$ يوجد $m \in \mathbb{N}$
و $C \in \mathbb{R}^+$ حيث:

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega) : |\langle T, \varphi \rangle| \leq C \cdot \sup_{\substack{|\alpha| \leq m \\ x \in K}} |D^\alpha \varphi(x)|$$

(يمكن كتابة $x \in \mathbb{R}^N$ لأن $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$).

مع:

$$\mathcal{D}_K(\Omega) = \mathcal{D}(K) = \{\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) / \operatorname{supp} \varphi \subset K\}$$

* ملاحظة:

المتراجحة السابقة محققة كذلك من أجل كل عدد طبيعي اكبر من m ($m+1, m+2, \dots$).

ترميز:

$$P_{K,m}(\varphi) := \sup_{\substack{x \in K \\ |\alpha| \leq m}} |D^\alpha \varphi(x)|$$

تعريف: في الخاصية السابقة إذا كان m مستقلا عن K نقول أن T توزيع منتهي الرتبة.
ونسمي رتبة التوزيع (في هذه الحالة) أصغر m يحقق هذه الخاصية.

أمثلة:

كل من التطبيقات التالية تمثل توزيعا.

① $f \in L^1_{loc}(\Omega)$، نعرف التوزيع T_f كما يلي:

$$\forall \varphi \in D(\Omega) : \langle T_f, \varphi \rangle := \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx$$

نلاحظ أن التطبيق:

$$\begin{aligned} L^1_{loc}(\Omega) &\longrightarrow D'(\Omega) \\ f &\longmapsto T_f \end{aligned}$$ خطي ومستمر

هذا يسمح بمطابقة $L^1_{loc}(\Omega)$ بجزء من $D'(\Omega)$

(أي سوف نرمز إلى $L^1_{loc}(\Omega)$ بالمجموعة جزئية من $D'(\Omega)$)

ونكتب: $L^1_{loc}(\Omega) \hookrightarrow D'(\Omega)$ // $\hookrightarrow$: منغمس.

② $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ، $a \in \Omega$ ونعرف توزيع ديراك بـ:

$$\forall \varphi \in D(\Omega) : \langle \delta_a, \varphi \rangle := \varphi(a)$$

③ $a \in \mathbb{R}^N$ (مثبت) $\alpha \in \mathbb{N}^N$ دليل متعدد (مثبت).

نعرف التوزيع T بـ:

$$\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^N) : \langle T, \varphi \rangle = D^\alpha \varphi(a)$$

④ ليكن: $T: D(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$ شكل خطي موجب

$$\varphi \longmapsto \langle T, \varphi \rangle$$

موجب يعني: $0 \leq \langle T, \varphi \rangle \Leftarrow 0 \leq \varphi$.

كل شكل خطي موجب هو توزيع لرادون

توزيع رادون: هو كل توزيع معرف على الدوال الملساء ذات الدعامة المتراصة.

⑤ القيمة الرئيسية لكوشي: $PV\frac{1}{x}$

$$\forall \varphi \in D(\mathbb{R}): \langle PV\tfrac{1}{x}, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx$$

تعريف التقارب في $D'(\Omega)$:

$(T_j) \in D'(\Omega)$ متتالية توزيعات على Ω، و $T \in D'(\Omega)$

نقول أن: $T_j \xrightarrow{D'(\Omega)} T$ إذا

$$\forall \varphi \in D(\Omega): \langle T_j, \varphi \rangle \xrightarrow{\mathbb{C}} \langle T, \varphi \rangle$$

توضيح: لتكن $f_j \in L^1(\mathbb{R}^N)$ بحيث:

① $0 \leq f_j$

② $\int_{\mathbb{R}^N} f_j = 1$

③ $\operatorname{supp} f_j \subset B(0, \varepsilon_j)$, $\varepsilon_j \xrightarrow{\text{صفر}} 0$

عندئذ: $T_{f_j} \equiv f_j \xrightarrow{D'(\mathbb{R}^N)} \delta$.

تمرين :

ليكن $f \in L^1_{Loc}(\Omega)$ ، $T_f \in D'(\Omega)$

إن الشرطين التاليين متكافئين :

① $T_f \xrightarrow{D'} \equiv 0$

② $f = 0$ تش (تقريبا أينما كان على Ω).

تمرين : (المصيدة للوسيط).

لتكن $f_j \in L^1_{Loc}(\Omega)$ بحيث :

① $f_j \xrightarrow{\text{تش}} f$

② $\exists g \in L^1_{Loc} : f_j(x) \leq g(x)$ (تش)

عندئذ : $f \in L^1_{Loc}(\Omega)$

$$T_{f_j} \equiv f_j \xrightarrow{D'(\Omega)} f.$$

تعريف الاشتقاق :

ليكن $T \in D'(\Omega)$. نعرف $\frac{\partial T}{\partial x_i}$ بالعلاقة :

$$\forall \varphi \in D(\Omega): \left\langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle = -\left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle$$

$$T \in D'(\Omega) \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial x_i} \in D'(\Omega) \Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j} \in D'(\Omega)$$

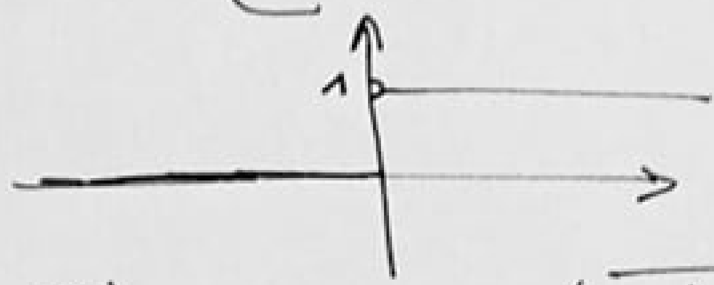
$$T \in C^\infty$$

تعميم :

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^N \quad \langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle$$

مثال 1

$$H(x) = \begin{cases} 1 & : x > 0 \\ 0 & : x \leq 0 \end{cases}$$



$H \in L^1_{loc}(\mathbb{R}) \Rightarrow$ T_H معرف.

$$\langle H', \varphi \rangle = -\langle H, \varphi' \rangle$$
$$= -\int_{-\infty}^{+\infty} H(x)\varphi'(x)\,dx = -\int_0^{+\infty} \varphi'(x)\,dx$$
$$= -\left[\varphi(x)\right]_0^{+\infty} = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in D(\mathbb{R})$$
$$\Rightarrow H' \equiv \delta.$$

مثال 2 : f تقبل الإشتقاق و $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$

ما هي العلاقة بين $(T_f)'$, $T_{f'}$ ؟

$\varphi \in D(\mathbb{R})$

$$\langle (T_f)', \varphi \rangle = -\langle T_f, \varphi' \rangle$$
$$= -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)\,dx$$

$$= \underbrace{-f(x)\varphi(x)}_{0}\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)\,dx$$

$$= \langle T_{f'}, \varphi \rangle$$

$$(T_f)' = T_{f'}$$

ملاحظة:

لكن $f \in C^1\left(\mathbb{R} \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \{a_i\}\right)$ مع وجود النهايات:

$$\lim_{x \to a_i^+} f(x) := f(a_i^+)$$

$$\lim_{x \to a_i^-} f(x) := f(a_i^-)$$

$$(T_f)' \overset{D'}{=} T_{f'} + \sum_{i=1}^{n} \left(f(a_i^+) - f(a_i^-)\right) \delta_{a_i}.$$

ملاحظة:

(T_j) متتالية من $D'(\Omega)$ ، $T \in D'(\Omega)$

نفرض أن: $T_j \xrightarrow{D'} T$

عندئذ: $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n : D^\alpha T_j \xrightarrow{D'} D^\alpha T$

تعريف (اقتصار توزيع).

$T \in D'(\Omega)$ و U مفتوح من Ω

كيف نعرف: $T_{|U} = ?$

$$\forall \varphi \in D(\Omega) : \langle T_{|U}, \varphi \rangle := \langle T, \varphi \rangle_{D', D}$$

$$\begin{pmatrix} \varphi \in D(U) \\ \Downarrow \\ \varphi \in D(\Omega) \end{pmatrix}$$

لاحظ أنّ: $T_{|U} \in D'(U)$

تعريف: (ضرب تابع في توزيع)

ليكن $f \in C^\infty(\Omega)$ و $T \in D'(\Omega)$

$$f \cdot T = ?$$

$$\forall \varphi \in D(\Omega) : \langle f \cdot T, \varphi \rangle := \langle \underset{D'(\Omega)}{T}, \underset{D(\Omega)}{f \cdot \varphi} \rangle$$

لاحظ أنّ $f \cdot T \in D'(\Omega)$.

ملاحظة:

لا يمكن تعريف ضرب توزيعين، بحيث نحافظ على خاصية "استمرار الضرب" المعروفة في التوابع العادية:

$$\begin{cases} f_j \to f \\ g_j \to g \end{cases} \Rightarrow f_j \cdot g_j \to f \cdot g$$

نظرية:

$$\begin{cases} T_j \xrightarrow{D'} T \\ f_j \xrightarrow{C^\infty} f \end{cases} \Rightarrow f_j \cdot T_j \xrightarrow{D'} f \cdot T$$

. التوزيعات ذات حوامل متراصة:

تعريف مفتوح الانعدام لتوزيع:

$T \in D'(\Omega)$

(مفتوح)

T منعدم على $U \subset \Omega$ إذا كان: $T|_U \equiv 0$

أي: $\forall \varphi \in D(U): \langle T|_U, \varphi \rangle = 0$

$(\langle T, \varphi \rangle)$

إذن: مفتوح الانعدام هو أكبر مفتوح ينعدم فيه T.

تمرين:

كل توزيع يقبل مفتوح انعدام.

تعريف:

حامل T هو متممة مفتوح الانعدام.

$\operatorname{supp} T = \complement \omega$

ω هو مفتوح الانعدام لـ T.

ننتبه هنا إلى التمرين المهم:

تمرين: (توطئة إرسون Urysohn).

ليكن F مغلق من $\mathbb{R}^N$.

K متراص من $\mathbb{R}^N$

حيث، $F \cap K = \emptyset$ عندئذ يوجد $\varphi \in D(\mathbb{R}^N)$ صحيحة.

① $\varphi \equiv 1$ في جوار K.

② $\varphi \equiv 0$ في جوار F.

③ $0 \leq \varphi \leq 1$.

تمرين: $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ (مفتوحة) غير خالية.

K متراص $\subset \Omega$

بين أن $\exists\, \varphi \in D(\Omega)$ بحيث: $0 \leq \varphi \leq 1$

$\varphi \equiv 1$ في جوار K.

[1] V. S. Vladimirov (2002), Methods of the theory of generalized functions, Analytical Methods and Special Functions, Vol. 6, London–New York: Taylor & Francis, pp. XII+353, ISBN 0-415-27356-0