Opérateurs linéaires compacts

27 avril 2022

Table des matières

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne un corps qui sera soit $\mathbb{R}$ soit $\mathbb{C}$.

1 Définitions et premières propriétés

Définition 1.1 *Soient E, F deux espaces normés et $A : E \to F$ un opérateur linéaire. On dit que A est compact s'il vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes :*

i) *L'image par A de la boule-unité fermée $B_E = B'(0,1)$ de E est relativement compacte dans F, i.e. $\overline{A(B_E)}$ est compacte dans F.*

ii) *L'image par A de tout ensemble borné de E est relativement compacte dans F.*

iii) *Toute suite bornée $(x_n)_n$ de points de E admet une sous-suite $(x_{n_j})_j$ telle que $(Ax_{n_j})_j$ soit convergente.*

iv) *Toute suite $(x_n)_n$ de points de B_E admet une sous-suite $(x_{n_j})_j$ telle que $(Ax_{n_j})_j$ soit convergente.*

L'ensemble des opérateurs linéaires compacts dans $L(E,F)$ sera noté $\mathcal{K}(E,F)$. On pose $\mathcal{K}(E) = \mathcal{K}(E,E)$.

Remarque 1.1 Il ressort de la définition qu'*un opérateur linéaire compact est borné.* En effet, comme tout ensemble relativement compact est borné, la condition " $A(B_E)$ relativement compacte dans F" assure en fait la bornitude de A. Ainsi, $\mathcal{K}(E,F) \subset \mathcal{L}(E,F)$.
La réciproque n'est pas vraie en dimensions infinies comme on le verra dans la proposition 1.3.

Exemple 1.1 Lopérateur d'intégration (de Volterra) $f \mapsto Kf$ défini par

$$Kf(x) = \int_0^x f(t)dt, \qquad x \in [0,1],$$

est un opérateur compact de $C([0,1])$ dans lui-même.

En effet, soit B_∞ la boule unité fermée de $C([0,1])$. Pour tout $f \in B_\infty$ et tout $x \in [0,1]$, on a

$$|Kf(x)| = \left|\int_0^x f(t)dt\right| \leq \int_0^x |f(t)|\, dt \leq \int_0^1 \|f\|_\infty\, dt = \|f\|_\infty \leq 1,$$

d'où, en prenant le sup sur $x \in [0,1]$ dans le membre de gauche,

$$\sup_{x\in[0,1]} |Kf(x)| := \|Kf\|_\infty \leq 1.$$

Donc $K(B_\infty)$ est une partie bornée de $C([0,1])$.

D'autre part, si $x, x' \in [0,1]$ et $f \in B_\infty$, on a

$$|Kf(x) - Kf(x')| = \left|\int_{x'}^x f(t)dt\right| \leq \left|\int_{x'}^x |f(t)|\, dt\right| \leq \left|\int_{x'}^x \|f\|_\infty\, dt\right| \leq \left|\int_{x'}^x dt\right| = |x - x'|\,.$$

Etant donné $\varepsilon > 0$, si $|x - x'| \leq \varepsilon$, alors $|Kf(x) - Kf(x')| \leq \varepsilon$. On peut donc prendre $\delta = \varepsilon$ pour conclure à l'équicontinuité de $K(B_\infty)$. Par le théorème d'Ascoli-Arzelà, on déduit que $K(B_\infty)$ est relativement compacte dans $C([0,1])$, d'où la compacité de l'opérateur $K : C([0,1]) \to C([0,1])$.

Nous allons maintenant citer quelques propriétés de stabilité des opérateurs linéaires compacts.

Proposition 1.1 *Soient E, F, G trois espaces normés.*

(i) *Si $A, B \in \mathcal{K}(E,F)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ alors $\alpha A + \beta B$ est compact. $\mathcal{K}(E,F)$ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E,F)$.*

(ii) *Si $A \in \mathcal{L}(E,F), B \in \mathcal{L}(F,G)$ et l'un au moins des opérateurs A, B est compact, alors BA est compact.*

Proposition 1.2 *Soient E, F deux espaces normés et $A \in \mathcal{L}(E, F)$.*

(i) *Si A est <u>de rang fini</u> (i.e. $\dim(\operatorname{Im} A) < +\infty$), alors A est compact.*

(ii) *Si $\dim E$ ou $\dim F$ est finie, alors A est compact. Autrement dit, $\mathcal{K}(E, F) = \mathcal{L}(E, F)$ si $\dim E < \infty$ ou $\dim F < \infty$.*

(iii) *Supposons que E et F soient des espaces <u>de Banach</u>. Si A est compact et $\operatorname{Im} A$ est fermé, alors A est de rang fini.*

Proposition 1.3 *Si E est un espace normé de dimension infinie alors l'opérateur identité I sur E n'est pas compact.*

Preuve. Noter simplement que $\overline{I(B_E)} = \overline{B_E} = B_E$ n'est jamais compacte si E est de dimension infinie. ■

Corollaire 1.1 *Si E est un espace normé de dimension infinie et $A \in \mathcal{K}(E)$ alors A n'est pas inversible (dans $\mathcal{L}(E)$), i.e. n'admet pas d'inverse borné.*

Preuve. Supposons que A soit inversible. Alors, par la proposition 1.1 (ii), l'opérateur identité $I = A^{-1}A$ sur E doit être compact. Mais comme E est de dimension infinie ceci contredit la proposition ci-dessus. ■

Proposition 1.4 *Si E est un espace normé, F est un espace de Banach et (A_n) est une suite dans $\mathcal{K}(E, F)$ qui converge uniformément vers un opérateur A (i.e. $\lim_{n\to\infty} \|A - A_n\| = 0$), alors A est compact. Autrement dit, $\mathcal{K}(E, F)$ est fermé dans $\mathcal{L}(E, F)$.*

Corollaire 1.2 *Si E est un espace normé, F est un espace de Banach et $A \in \mathcal{L}(E, F)$ est limite uniforme d'une suite d'opérateurs $(A_n) \subset \mathcal{L}(E, F)$ de rang fini, alors A est compact.*

Théorème 1.1 (Schauder, Adjoint d'un opérateur compact) *Soient H un espace de Hilbert, et $A \in \mathcal{L}(H)$. Alors A est compact si et seulement si son adjoint A^* est compact.*

Opérateurs compacts et convergence faible. A l'instar de la proposition 4.3 (Chapitre : Espaces de Hilbert et opérateurs linéaires bornés), on montre que

Proposition 1.5 *Soient E, F deux espaces normés et $(x_n)_n$ une suite de E qui converge faiblement vers x. Alors, pour tout $A \in \mathcal{L}(E, F)$, la suite $(Ax_n)_n$ converge faiblement vers Ax dans F, i.e.*

$$x_n \rightharpoonup x \implies Ax_n \rightharpoonup Ax.$$

Ainsi, tout opérateur de $\mathcal{L}(E,F)$ fait correspondre à une suite faiblement convergente de E une suite faiblement convergente de F. Il se trouve que les opérateurs de $\mathcal{K}(E,F)$ font correspondre à toute suite faiblement convergente dans E une suite fortement convergente dans F. Pour établir ce résultat, on aura besoin du lemme suivant.

Lemme 1.1 *Toute suite faiblement convergente et relativement compacte est fortement convergente.*

Preuve. Laissée à titre d'exercice. ■

Proposition 1.6 *Soient E, F deux espaces de Banach et $A : E \to F$ un opérateur linéaire. Alors,*

(i) *Si A est compact, alors A est complètement continu, i.e.,*

$$x_n \rightharpoonup x \quad \text{dans } E \implies Ax_n \to Ax \quad \text{dans } F.$$

(ii) *Inversement, si A est complètement continu et E est réflexif, alors A est compact.*

2 Alternative de Fredholm

Soit H un espace de Hilbert, et soit $K : H \to H$ un opérateur linéaire compact. Le théorème suivant décrit diverses relations entre le noyau et l'image d'un opérateur ayant la forme $I - K$ et de son adjoint.

Théorème 2.1 (Fredholm) *Soit H un espace de Hilbert, et soit $K \in \mathcal{K}(H)$. Alors*

i) $\ker(I-K)$ *est de dimension finie ;*

ii) $\dim\ker(I-K) = \dim\ker(I-K^*)$;

iii) $\operatorname{Im}(I-K)$ *est fermé, et plus précisément*

$$\operatorname{Im}(I-K) = \ker(I-K^*)^{\perp};$$

iv) $\ker(I-K) = \{0\}$ *si et seulement si* $\operatorname{Im}(I-K) = H$. *Autrement dit, $I - K$ est injectif ssi il est surjectif.*

Remarque 2.1 La propriété (iv) est familière en dimension finie : si $\dim H < \infty$, un opérateur de $L(H)$ est injectif si et seulement s'il est surjectif. Par contre en dimension infinie un opérateur linéaire borné peut être injectif sans être surjectif et inversement : par exemple Ie shift à droite (resp. à gauche) dans ℓ^2. La conclusion (iv) exprime donc une propriété remarquable des opérateurs de la forme $I - K$ avec $K \in \mathcal{K}(H)$.

Remarque 2.2 (Alternative de Fredholm) Lorsque K est un opérateur linéaire compact, le théorème ci-dessus fournit une information concernant l'existence et l'unicité des solutions de l'équation linéaire

$$u - Ku = f, \tag{1}$$

d'inconnue $u \in H$. A savoir, deux cas peuvent se présenter.

Cas 1. ***Ou bien*** $\ker(I - K) = \{0\}$.

Alors, l'opérateur $I - K$ est injectif et surjectif (iv). Pour tout $f \in H$, l'équation (1) admet une solution unique $u \in H$.

Cas 2. ***Ou bien*** $\ker(I - K) \neq \{0\}$.

Ceci signifie que l'équation homogène $u - Ku = 0$ admet n $(= \dim \ker(I - K))$ solutions linéairement indépendantes et, dans ce cas, l'équation (1) admet une solution si et seulement si $f \in \ker(I - K^*)^\perp$ (iii), i.e., si et seulement si

$$(f, v) = 0 \quad \text{pour tout } v \in H \text{ t.q. } v - K^* v = 0. \tag{2}$$

Autrement dit, si et seulement si f vérifie n *conditions d'orthogonalité* :

$$(f, v_i) = 0 \qquad i = 1, ..., n, \tag{3}$$

où $v_1, v_2, ..., v_n$ forment une base de $\ker(I - K^*)$.

La dichotomie ci-dessus est connue sous le vocable *"Alternative de Fredholm".*

3 Appendice

Relative compacité Si Y est une partie d'un espace topologique X séparé, alors

$$Y \text{ est relativement compacte} \overset{\text{déf}}{\iff} \overline{Y} \text{ est compacte.}$$

Si Y est une partie d'un espace métrique X (en particulier, X espace normé), alors

$$\begin{aligned} Y \text{ est relativement compacte} &\iff \text{toute suite de } Y \text{ admet une sous-suite convergente,} \\ Y \text{ est relativement compacte} &\implies Y \text{ est bornée.} \end{aligned}$$

Equicontinuité Soit $X = (X, d)$ un espace métrique.

Définition 3.1 *Soit $\mathcal{S}$ une partie non vide de $C(X, \mathbb{K})$ et soit $x \in X$. On dit que $\mathcal{S}$ est* *équicontinue* *en x si elle satisfait la condition suivante :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall y \in X,\ \forall f \in \mathcal{S} : \quad d(y, x) < \delta \implies |f(y) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

On dit que $\mathcal{S}$ est équicontinue si $\mathcal{S}$ est équicontinue en tout point de X.

Observons que dans la définition ci-dessus, le δ est indépendant de f, lorsque f parcourt $\mathcal{S}$. Si de plus, δ est indépendant de $x \in X$, i.e.,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x, y \in X,\ \forall f \in \mathcal{S} : \quad d(y, x) < \delta \implies |f(y) - f(x)| \leq \varepsilon,$$

l'équicontinuité de $\mathcal{S}$ est dite *uniforme*.

Théorème d'Ascoli-Arzelà Le théorème fondamental suivant fournit un critère de compacité dans $C(X, \mathbb{K})$.

Théorème 3.1 (G. Ascoli & C. Arzelà) *Soit X un espace métrique compact. Une partie $\mathcal{S}$ de $C(X, \mathbb{K})$ est relativement compacte dans $(C(X, \mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$ si et seulement si elle est bornée (i.e. $\sup_{f \in \mathcal{S}} \|f\|_\infty < \infty$) et équicontinue.*