Université d'Oum El Bouaghi — Année universitaire 2021/2022

Analyse fonctionnelle 2 — Mastrer 1 - Mathématiques appliquées

FEUILLE DE TD (Opérateurs dans les espaces de Hilbert)

Exercice 1

1. *Soient H_1 et H_2 deux espaces préhilbertiens et $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Montrer que $T = 0$ si et seulement si $(Tx, y) = 0$ pour tout $(x, y) \in H_1 \times H_2$.*

2. *On suppose maintenant que $T \in \mathcal{L}(H)$ où H est un espace préhilbertien complexe. Montrer que si $(Tx, x) = 0$ pour tout $x \in H$, alors $T = 0$.*

Exercice 2 *Soit H un espace de Hilbert et soit $T \in \mathcal{L}(H)$. On suppose que T est auto-adjoint positif.*

1. *Montrer que*

$$\forall x, y \in H : \quad |(Tx, y)|^2 \leq (Tx, x)(Ty, y).$$

   Indication. On pourra montrer que l'application $(x, y) \mapsto (Tx, y)$ est un semi-produit scalaire sur H puis conclure.

2. *En déduire que pour tout $x \in H$, $Tx = 0$ si et seulement si $(Tx, x) = 0$, ensuite que T est injectif si et seulement $(Tx, x) > 0$ pour tout $x \neq 0$.*

Exercice 3 *On se place dans l'espace de Hilbert $H = L^2([a, b], \mathbb{C})$. Considérons l'opérateur intégral $T : H \to H$, $f \mapsto Tf$ défini par*

$$Tf(x) = \int_a^b k(x, y) f(y) dy \ , \quad x \in (a, b),$$

de noyau $k \in C([a, b]^2, \mathbb{C})$.

1. *Montrer que $T \in \mathcal{L}(H)$.*

2. *Déterminer l'adjoint T^* de T.*

3. *Pour quelle(s) condition(s), T est-il auto-adjoint ?*

4. *Qu'en est-il dans le cas où $H = L^2([a, b], \mathbb{R})$ et $k \in C([a, b]^2, \mathbb{R})$?*

Exercice 4 *Soit $H = L^2([0,1],\mathbb{R})$. Pour $f \in H$, on pose*

$$Af(x) = \int_0^x f(t)dt \ , \quad x \in [0,1].$$

1. *Montrer que A est un opérateur linéaire continu sur H.*

2. *Calculer l'adjoint de A.*

Exercice 5 *Soit H un espace de Hilbert réel de produit scalaire $(\cdot,\cdot)$. Soient $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux familles orthonormales de H, et $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de nombres réels non nuls.*

On suppose que pour tout $x \in H$, la série $\sum_n \alpha_n(x,e_n)f_n$ converge. on pose :

$$A(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n(x,e_n)f_n.$$

1. *Montrer que $A \in \mathcal{L}(H)$.*
   Indication. On pourra d'abord considérer les sommes partielles $S_n : x \in H \mapsto \sum_{k=0}^{n} \alpha_k(x,e_k)f_k$ puis faire un passage à la limite.

2. *Déterminer l'adjoint A^* de A.*

3. *Montrer que A est injectif si et seulement si $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille totale.*

4. *Montrer que A est à image dense dans H si et seulement si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille totale.*