

Espaces de Hilbert

et opérateurs linéaires bornés

22 avril 2022

Table des matières

1 Définitions, premières propriétés, exemples	1
2 Orthogonalité, théorèmes de projection	4
3 Bases hilbertiennes	7
4 Adjoint d'un opérateur linéaire borné	10
5 Opérateurs linéaires bornés auto-adjoints	12

On considère dans tout ce chapitre, un espace vectoriel H sur $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

1 Définitions, premières propriétés, exemples

Définition 1.1 (Produit scalaire) On appelle produit scalaire sur H toute application $(\cdot, \cdot)$ de $H \times H$ dans $\mathbb{K}$ telle que, quels que soient $x, y, x' \in H; \lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on ait les propriétés suivantes :

$$a) (\lambda x + \mu x', y) = \lambda (x, y) + \mu (x', y) \quad [\text{linéarité en } x]$$

$$b) (y, x) = (x, y) \quad \text{si } \mathbb{K} = \mathbb{R} \quad [\text{symétrie}]$$

$$(y, x) = \overline{(x, y)} \quad \text{si } \mathbb{K} = \mathbb{C} \quad [\text{antisymétrie ou symétrie hermitienne}]$$

c) $(x, x) \in \mathbb{R}^+$ [positivité]

d) $(x, x) = 0$ si et seulement si $x = 0$.

Remarque 1.1 Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, le produit scalaire est aussi linéaire dans la seconde variable ; il est "bilinéaire symétrique".

Mais si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, les propriétés (a) et (b) donnent :

$$(x, \lambda y + \mu y') = \bar{\lambda}(x, y) + \bar{\mu}(x, y') \quad \forall x, y, y' \in H, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

Le produit scalaire n'est pas linéaire dans la seconde variable, il est antilinéaire en y . On parle alors de forme "sesquilinéaire hermitienne".

Définition 1.2 (Semi-produit scalaire) Une application $(\cdot, \cdot) : H \times H \rightarrow K$ qui satisfait uniquement les trois premiers axiomes (a), (b) et (c) est appelée semi-produit scalaire.

Définition 1.3 (Espace préhilbertien) Un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel H muni d'un produit scalaire est appelé espace préhilbertien (réel si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, complexe si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

Exemples

1. On prend $H = \mathbb{R}^d$ et $(x, y) = \sum_{i=1}^d x_i y_i$ (espace euclidien canonique de dimension d).
2. On prend $H = \mathbb{C}^d$ et $(x, y) = \sum_{i=1}^d x_i \bar{y}_i$ (espace hermitien canonique de dimension d).
3. ℓ^2 est un espace préhilbertien pour le produit scalaire :

$$\begin{aligned} (x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n & \text{si } \mathbb{K} = \mathbb{R}, \\ (x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} x_n \bar{y}_n & \text{si } \mathbb{K} = \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Proposition 1.1 Soit H un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $(\cdot, \cdot)$. La relation

$$\|x\| = (x, x)^{1/2} \tag{1}$$

définit une norme sur H .

Cette norme vérifie la relation suivante (appelée identité du parallélogramme) pour tous $x, y \in H$:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2). \tag{2}$$

Proposition 1.2 (Inégalité de Cauchy-Schwarz) Soit H un espace vectoriel muni d'un semi-produit scalaire $(\cdot, \cdot)$. Pour tous $x, y \in H$, on a :

$$|(x, y)| \leq \|x\| \|y\|. \quad (3)$$

De plus, l'égalité n'a lieu que si x et y sont colinéaires (i.e. linéairement dépendants).

Proposition 1.3 Soit H un espace préhilbertien. Le produit scalaire $(\cdot, \cdot)$ est une application continue de $H \times H$ dans $\mathbb{K}$, i.e. pour toutes suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ de H et tous $x, y \in H$, on a

$$(x_n \rightarrow x \quad \text{et} \quad y_n \rightarrow y) \implies (x_n, y_n) \rightarrow (x, y).$$

Définition 1.4 (Espace de Hilbert) Un espace préhilbertien complet pour la norme définie par son produit scalaire est appelé *espace de Hilbert*.

Exemples fondamentaux.

1. Tout espace préhilbertien de dimension finie est un espace de Hilbert (c'est le cas de $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{C}^d$ munis de leurs produits scalaires canoniques respectifs).
2. ℓ^2 est un espace de Hilbert pour le produit scalaire :

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \bar{y}_n \quad (x_n, y_n \in \mathbb{C})$$

dont la norme associée est

$$\|x\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \right)^{1/2}.$$

3. Etant donné un ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$, l'espace $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire :

$$(f, g) = \int_{\Omega} f(x) \overline{g(x)} dx, \quad (4)$$

de norme associée

$$\|f\| = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

4. Ω étant un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$, l'espace $C(\overline{\Omega})$ n'est pas un espace de Hilbert pour le produit scalaire (4).

2 Orthogonalité, théorèmes de projection

Définition 2.1 Deux vecteurs x et y d'un espace préhilbertien sont dits orthogonaux si $(x, y) = 0$, ce qu'on note $x \perp y$.

La relation d'orthogonalité $\perp$ est symétrique.

Etant donné $x \in H$, il est immédiat d'après l'axiome (d) de la définition 1.1, que si x est orthogonal à tout $y \in H$, alors $x = 0$, i.e.

$$(\forall y \in H : (x, y) = 0) \implies x = 0.$$

Proposition 2.1 (Théorème de Pythagore) Si x et y sont deux vecteurs orthogonaux d'un espace préhilbertien, alors

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2. \quad (5)$$

Preuve. Découle immédiatement de ce que

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \operatorname{Re}(x, y) \quad \forall x, y \in H.$$

■

Remarque 2.1 Le résultat de la proposition ci-dessus s'étend par récurrence à un nombre fini de vecteurs deux à deux orthogonaux $x_1, \dots, x_n$:

$$\left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2. \quad (6)$$

Remarque 2.2 La réciproque de la proposition ci-dessus est vraie dans le cas des espaces préhilbertiens réels.

Définition 2.2 On appelle orthogonal d'une partie A de H , l'ensemble noté $A^\perp$ formé des éléments orthogonaux à tous les éléments de A ,

$$A^\perp = \{x \in H; (x, a) = 0 \quad \forall a \in A\}.$$

Proposition 2.2 Pour deux parties A et B d'un espace préhilbertien H , on a :

- i) $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé.
- ii) $A \subset B \implies B^\perp \subset A^\perp$

$$\text{iii) } A^\perp = (\overline{A})^\perp = (\text{Vect } A)^\perp = (\overline{\text{Vect } A})^\perp.$$

Théorème 2.1 (Projection sur un convexe fermé) *Soit K un convexe fermé non vide d'un espace de Hilbert H . Alors, pour tout point x de H , il existe un unique point x_K de K tel que :*

$$\|x - x_K\| = \min_{y \in K} \|x - y\| \quad (= d(x, K)). \quad (7)$$

Autrement dit, il existe un unique point $x_K \in K$ qui est à une distance de x la plus petite possible. Ce point x_K est appelé projection de x sur K , et est caractérisé par la propriété

$$\begin{cases} x_K \in K, \\ \text{Re}(x - x_K, y - x_K) \leq 0, \quad \forall y \in K. \end{cases} \quad (8)$$

Remarque 2.3 Si $x \in K$, alors $x_K = x$.

Remarque 2.4 La conclusion du théorème reste vraie si l'on suppose simplement que H est préhilbertien et que le convexe K est complet pour la distance induite.

En posant $P_K(x) = x_K$, on définit une application $P_K : H \rightarrow H$, appelée opérateur de projection sur l'ensemble convexe K .

Proposition 2.3 *Sous les hypothèses du théorème 2.1, on a :*

$$\forall x, y \in H, \quad \|P_K(x) - P_K(y)\| \leq \|x - y\|. \quad (9)$$

Autrement dit, l'opérateur P_K est 1-lipschitzien (donc, en particulier, continu).

Le cas particulier le plus important du théorème 2.1 concerne la projection sur un sous-espace vectoriel fermé V de H (c'est un convexe particulier).

Théorème 2.2 (Projection sur un sev fermé) *Soit V un sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Hilbert H . Alors, pour tout $x \in H$, il existe un unique $x_V \in V$ tel que*

$$\|x - x_V\| = \min_{v \in V} \|x - v\|.$$

De plus, $x_V = P_V(x)$ est caractérisé par

$$\begin{cases} x_V \in V, \\ (x - x_V, v) = 0, \quad \forall v \in V \quad (\text{i.e. } x - x_V \in V^\perp). \end{cases} \quad (10)$$

Remarque 2.5 La caractérisation (10) signifie que $u = P_V(x)$ est l'unique point de V tel que $x - u \in V^\perp$.

Corollaire 2.1 Soit V un sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Hilbert H .

i) H se décompose en somme directe des sous-espaces orthogonaux V et $V^\perp$; i.e.

$$H = V \oplus V^\perp \quad (11)$$

et P_V est la projection sur V parallèlement à $V^\perp$ (on dit que P_V est la projection orthogonale ou encore le projecteur orthogonal sur V).

ii) P_V est un opérateur linéaire continu de H dans H (donc la somme (11) est topologique).

iii) Si $V \neq \{0\}$, alors $\|P_V\| = 1$.

iv) $P_V^2 = P_V$ et $(P_V x, y) = (x, P_V y) = (P_V(x), P_V(y))$ pour tous $x, y \in H$.

v) $\ker P_V = V^\perp$ et $\operatorname{Im} P_V = V$.

vi) $(V^\perp)^\perp = V$.

Remarque 2.6 Ces deux résultats (Théorème 2.2 et Corollaire 2.1) demeurent vrais si l'on suppose seulement que H est préhilbertien et V complet pour la norme induite, en particulier si V est de dimension finie.

Le corollaire suivant fournit un critère de densité très utile.

Corollaire 2.2 Pour tout sous-espace vectoriel V d'un espace de Hilbert H , on a :

$$H = \overline{V} \oplus V^\perp.$$

En particulier,

$$(V \text{ est dense dans } H) \iff V^\perp = \{0\}.$$

Remarque 2.7 Soit A une partie d'un espace de Hilbert H . Du corollaire ci-dessus, il découle que :

$$(A \text{ est totale dans } H, \text{ i.e. } \overline{\operatorname{Vect} A} = H) \iff A^\perp = \{0\}.$$

3 Bases hilbertiennes

On considère ici un espace préhilbertien H .

Définition 3.1 Une famille $(x_i)_{i \in I}$ (I ensemble d'indices) d'éléments $x_i \in H$ est dite famille orthogonale si les x_i sont deux à deux orthogonaux, i.e. pour tous $i \neq j$, $(x_i, x_j) = 0$.

Proposition 3.1 Une famille orthogonale dont aucun élément n'est nul est libre.

Définition 3.2 Une famille orthogonale dont tous les éléments sont de norme égale à 1 est dite famille orthonormale (ou orthonormée).

Exemples.

Exemple 3.1 Les éléments de la base canonique $(\mathbf{e}_i)_{i=1}^d$ $\left(\mathbf{e}_i = (0, \dots, \overset{i}{1}, 0, \dots, 0)\right)$ de $\mathbb{C}^d$ forment une famille orthonormale relativement au produit scalaire $(x, y) = x \cdot y = \sum_{i=1}^d x_i \overline{y_i}$.

Exemple 3.2 Dans ℓ^2 , la famille $(\mathbf{e}_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$, $\mathbf{e}_i = (0, \dots, \overset{i}{1}, 0, \dots)$ est orthonormale pour le produit scalaire $(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$.

Exemple 3.3 Dans $H = C([0, 1], \mathbb{C})$ muni du produit scalaire $(f, g) = \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} dx$, la famille $(\mathbf{e}_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ d'éléments de H définis par

$$\mathbf{e}_n(x) = e^{2i\pi nx}, \quad x \in [0, 1], \quad n \in \mathbb{Z}$$

est orthonormale.

Proposition 3.2 Soit $(e_j)_{j \in J}$ une famille orthonormale finie d'un espace préhilbertien H et soit V l'espace vectoriel engendré par cette famille.

Pour tout $x \in H$, la projection orthogonale $P_V(x)$ de x sur V est donnée par

$$P_V(x) = \sum_{j \in J} (x, e_j) e_j. \quad (12)$$

En conséquence,

$$\|x\|^2 = \left\| x - \sum_{j \in J} (x, e_j) e_j \right\|^2 + \sum_{j \in J} |(x, e_j)|^2 \quad (13)$$

Proposition 3.3 (Inégalité de Bessel) Soit $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille orthonormale d'un espace préhilbertien H . Alors, pour tout $x \in H$, la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}} |(x, e_n)|^2$ converge et sa somme vérifie l'inégalité (de Bessel)

$$\sum_{n=0}^{\infty} |(x, e_n)|^2 \leq \|x\|^2. \quad (14)$$

En particulier, la suite numérique $((x, e_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est un élément de ℓ^2 .

Définition 3.3 (Base hilbertienne) On appelle base hilbertienne d'un espace préhilbertien H une famille dénombrable $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ orthonormale et totale, i.e.

i) $(e_n, e_m) = \delta_{nm}, \quad \forall n, m \in \mathbb{N};$

ii) L' espace vectoriel engendré par les e_n est dense dans H , i.e. $\overline{\text{Vect}\{e_n; n \in \mathbb{N}\}} = H$.

L'égalité dans l'inégalité de Bessel est caractérisée dans le théorème suivant.

Théorème 3.1 (Bessel-Parseval) Soit $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille orthonormale d'un espace préhilbertien H . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. La famille $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est (totale et donc) une base hilbertienne de H .

2. Egalité de Parseval : $\forall x \in H, \quad \|x\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |(x, e_n)|^2$.

3. Relation de Parseval : $\forall x, y \in H \quad (x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} (x, e_n) (e_n, y) \left(= \sum_{n=0}^{\infty} (x, e_n) \overline{(y, e_n)} \right)$.
Ainsi, si $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de H , l'application $x \mapsto ((x, e_n))_{n \in \mathbb{N}}$ définie de H dans ℓ^2 est une isométrie linéaire. Cette isométrie est surjective si et seulement si H est un espace de Hilbert.

Exemple 3.4 Considérons l'espace ℓ^2 muni du produit scalaire $(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$ où $x = (x_n)_{n \geq 1}$ et $y = (y_n)_{n \geq 1}$.

Soit pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la suite scalaire $\mathbf{e}_k = (0, \dots, \overset{k}{1}, 0, \dots)$ dont tous les termes sont nuls sauf celui d'ordre k lequel vaut 1. On vérifie que la famille orthonormale $(\mathbf{e}_k)_{k \geq 1}$ est une base hilbertienne de ℓ^2 , car l'égalité de Parseval $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(x, \mathbf{e}_k)|^2$ résulte immédiatement de la définition du produit scalaire dans ℓ^2 , compte tenu de ce que, si $x = (x_n)_{n \geq 1} \in \ell^2$, on a $(x, \mathbf{e}_n) = x_n$. En effet,

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(x, \mathbf{e}_n)|^2.$$

Remarque 3.1 La démonstration des points 1 et 2 du théorème ci-dessus montre que, si $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille orthonormale d'un espace préhilbertien H , l'égalité de Parseval $\|x\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |(x, e_n)|^2$ caractérise les points x appartenant à l'adhérence de l'espace vectoriel engendré par la famille $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$, i.e.

$$\|x\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |(x, e_n)|^2 \iff x \in \overline{\text{Vect} \{e_n ; n \in \mathbb{N}\}}.$$

Théorème 3.2 Soit $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une base hilbertienne d'un espace préhilbertien H . Alors, pour tout élément x de H , on a

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} (x, e_n) e_n. \quad (15)$$

Autrement dit, la série $\sum_{n \geq 0} (x, e_n) e_n$ converge vers x au sens de la norme $\|\cdot\|$ associée au produit scalaire $(\cdot, \cdot)$.

Preuve. D'après la proposition 3.2, on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left\| x - \sum_{j=0}^n (x, e_j) e_j \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{j=0}^n |(x, e_j)|^2. \quad (16)$$

Il suffit alors de faire un passage à la limite $n \rightarrow \infty$ en tenant compte de l'égalité de Parseval.

■

Remarque 3.2 La série $\sum_{n \geq 0} (x, e_n) e_n$ est appelée *série de Fourier de x suivant la base hilbertienne $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$* .

Les coefficients (x, e_n) sont appelés *coefficients de Fourier de x suivant la base $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$* et constituent l'unique famille de coefficients permettant d'exprimer x dans la base hilbertienne $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$, i.e.

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n e_n \implies (\alpha_n = (x, e_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}).$$

Un polynôme $\sum_{n=0}^k (x, e_n) e_n$, somme partielle de la série de Fourier, s'appelle polynôme de Fourier (de x).

L'existence d'une base hilbertienne n'est pas garantie pour tous les espaces préhilbertiens. La proposition suivante fournit une condition nécessaire et suffisante d'existence d'une telle base.

Proposition 3.4 Un espace préhilbertien admet une base hilbertienne si et seulement s'il est séparable.

4 Adjoint d'un opérateur linéaire borné

Dans toute cette section, H_1 et H_2 seront (sauf mention contraire) des espaces de Hilbert sur le même corps $\mathbb{K}$. On rappelle que $\mathcal{L}(H_1, H_2)$ désigne l'espace des opérateurs linéaires bornés définis (partout) sur H_1 à valeurs dans H_2 . On note par le même symbole les produits scalaires dans H_1 et H_2 ainsi que les normes associées dans H_1 , H_2 , $\mathcal{L}(H_1, H_2)$ et $\mathcal{L}(H_2, H_1)$. Dans le cas où $H_1 = H_2 = H$, on désignera par I l'identité de H .

Théorème 4.1 *Pour tout $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$, il existe un unique opérateur $T^* \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ (attention à l'ordre) tel que*

$$\forall (x, y) \in H_1 \times H_2 : \quad (Tx, y) = (x, T^*y).$$

L'opérateur T^ est appelé l'adjoint de T . De plus*

$$\|T^*\| = \|T\|.$$

Exemple 4.1 Soit $H = \mathbb{R}^d$ muni de la structure euclidienne canonique (l'espace $\mathcal{L}(H)$ s'identifie à l'espace $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ des matrices $d \times d$ à coefficients réels).

Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ et T^* son adjoint. Soit $A = (a_{ij})$ la matrice de T et soit $B = (b_{ij})$ la matrice de T^* par rapport à la base canonique $(\mathbf{e}_i)_{i=1}^d$. On a :

$$T\mathbf{e}_i = a_{1i}\mathbf{e}_1 + a_{2i}\mathbf{e}_2 + \cdots + a_{di}\mathbf{e}_d = \sum_{k=1}^d a_{ki}\mathbf{e}_k,$$

de sorte que

$$(T\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = a_{ji}$$

puisque $(\mathbf{e}_i)_{i=1}^d$ est orthonormale. Ainsi,

$$b_{ij} = (T^*\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i) = (\mathbf{e}_j, T\mathbf{e}_i) = (T\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = a_{ji}.$$

La matrice B de T^* est donc la *matrice transposée* tA de celle de T .

Si $H = \mathbb{C}^d$ muni de la structure hermitienne canonique (l'espace $\mathcal{L}(H)$ s'identifie à $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$), on a

$$b_{ij} = (T^*\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i) = (\mathbf{e}_j, T\mathbf{e}_i) = \overline{(T\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)} = \overline{a_{ji}}.$$

La matrice de T^* est donc la *matrice transconjugée* (*conjugée de la transposée*) de celle de T .

Exemple 4.2 Pour $k \in C([0, 1], \mathbb{C})$, On définit $T_k \in \mathcal{L}(L^2([0, 1], \mathbb{C}))$ par

$$(T_k f)(t) = k(t)f(t), \quad t \in [0, 1].$$

Alors, $(T_k)^* = T_{\bar{k}}$.

Pour établir certaines propriétés de l'adjoint d'un opérateur linéaire borné, il sera fait usage du lemme suivant.

Lemme 4.1 Soient H_1 et H_2 deux espaces préhilbertiens et $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Alors,

1. $T = 0$ si et seulement si $(Tx, y) = 0$ pour tout $(x, y) \in H_1 \times H_2$.
2. On suppose maintenant que $T \in \mathcal{L}(H)$ où H est un espace préhilbertien complexe, i.e. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Si $(Tx, x) = 0$ pour tout $x \in H$, alors $T = 0$.

Preuve. Laissée à titre d'exercice. ■

Les propriétés suivantes se déduisent immédiatement de la définition de l'adjoint.

Proposition 4.1 (Propriétés de l'opérateur adjoint) Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert, $T, S : H_1 \rightarrow H_2$ deux opérateurs linéaires bornés et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors,

- a) $(T + S)^* = T^* + S^*$ et $(\lambda T)^* = \bar{\lambda}T^*$.
- b) $T^{**} = T$ (L'application $T \mapsto T^*$ définie de $\mathcal{L}(H_1, H_2)$ dans $\mathcal{L}(H_2, H_1)$ est involutive).
- c) $\|TT^*\| = \|T^*T\| = \|T\|^2$.
- d) $T^*T = 0 \iff T = 0$.
- e) $I^* = I$ et $(TS)^* = S^*T^*$ (en supposant $H_1 = H_2$).
- f) Si T est inversible, alors T^* est inversible et $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

Preuve. Laissée à titre d'exercice. ■

Proposition 4.2 Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Alors,

- a) $\ker T = (\operatorname{Im} T^*)^\perp$ et $\ker T^* = (\operatorname{Im} T)^\perp$;
- b) $\overline{\operatorname{Im} T} = (\ker T^*)^\perp$ et $\overline{\operatorname{Im} T^*} = (\ker T)^\perp$;
- c) $\operatorname{Im} T$ est dense dans H_2 si et seulement si T^* est injectif.
- d) $\operatorname{Im} T^*$ est dense dans H_1 si et seulement si T est injectif.

L'existence de L'adjoint d'un opérateur linéaire continu permet de montrer la propriété suivante.

Proposition 4.3 *Soit $(x_n)_n$ une suite de H_1 qui converge faiblement vers x . Alors, pour tout $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$, la suite $(Tx_n)_n$ converge faiblement vers Tx dans H_2 , i.e.*

$$x_n \rightharpoonup x \quad \text{dans } H_1 \implies Tx_n \rightharpoonup Tx \quad \text{dans } H_2.$$

5 Opérateurs linéaires bornés auto-adjoints

Dans tout ce qui suit, H est un espace de Hilbert sur $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Définition 5.1 *Un opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$ est dit auto-adjoint si $T = T^*$, i.e.*

$$(Tx, y) = (x, Ty) \quad \forall x, y \in H.$$

On utilise aussi la terminologie opérateur symétrique si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et opérateur hermitien si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

D'après le point c) de la proposition 4.1, on voit que si T est auto-adjoint, alors $\|T^2\| = \|T\|^2$.

Exemple 5.1 Dans l'espace euclidien canonique $\mathbb{R}^d$, les opérateurs auto-adjoints sont ceux dont la matrice (a_{ij}) vérifie les relations $a_{ij} = a_{ji}$ (matrice symétrique).

Dans l'espace hermitien canonique $\mathbb{C}^d$, les opérateurs auto-adjoints sont ceux dont la matrice (a_{ij}) vérifie les relations $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$ (matrice hermitienne).

Exemple 5.2 Pour tout opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$, les opérateurs TT^* et T^*T sont auto-adjoints.

Exemple 5.3 Tout projecteur orthogonal P sur un sous-espace fermé de H est auto-adjoint vu que $(Px, y) = (x, Py)$ pour tous $x, y \in H$.

Exemple 5.4 L'opérateur T_k de l'exemple 4.2 (pour lequel on a vu que $(T_k)^* = T_{\bar{k}}$) est auto-adjoint si et seulement si la fonction k est à valeurs réelles.

Dans ce qui suit, quelques propriétés des opérateurs auto-adjoints.

Proposition 5.1 Soit $T \in \mathcal{L}(H)$. Alors,

1. Si T est auto-adjoint, alors $(Tx, x) \in \mathbb{R}$ pour tout $x \in H$.
2. Si H est complexe et $(Tx, x) \in \mathbb{R}$ pour tout $x \in H$, alors l'opérateur T est auto-adjoint.

Dans le second point de la proposition, il est essentiel que H soit complexe. Ceci est clair du moment que pour un H réel le produit scalaire est à valeurs réelles, ce qui rend (Tx, x) réel sans aucune hypothèse supplémentaire sur l'opérateur T .

Le point 1 de la proposition ci-dessus justifie la définition suivante.

Définition 5.2 On appelle opérateur auto-adjoint positif tout opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$ auto-adjoint tel que

$$\forall x \in H, \quad (Tx, x) \geq 0.$$

On vérifie immédiatement que pour tout $T \in \mathcal{L}(H)$, les opérateurs TT^* et T^*T sont auto-adjoints positifs :

$$(TT^*x, x) = (T^*x, T^*x) = \|T^*x\|^2 \geq 0.$$

Proposition 5.2 Soit T et S deux opérateurs auto-adjoints dans H .

1. Pour tous nombres réels α et β , $\alpha T + \beta S$ est un opérateur auto-adjoint dans H .
2. L'opérateur TS est auto-adjoint si et seulement si T et S commutent, i.e. $TS = ST$.

Proposition 5.3 La limite uniforme (i.e. dans $\mathcal{L}(H)$) d'une suite d'opérateurs linéaires bornés auto-adjoints $T_n : H \rightarrow H$ est un opérateur auto-adjoint.

Autrement dit, le sous-ensemble des opérateurs auto-adjoints dans $\mathcal{L}(H)$ est fermé.

Le résultat suivant fournit une autre expression de la norme d'un opérateur auto-adjoint.

Proposition 5.4 On suppose que $H \neq \{0\}$. Pour tout opérateur auto-adjoint $T \in \mathcal{L}(H)$,

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} |(Tx, x)| = \sup_{\|x\| \leq 1} |(Tx, x)|.$$