جامعة العربي بن مهيدي - أم البواقي

كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير — سنة أولى جذع مشترك

الحل النموذجي لامتحان الدورة العادية / رياضيات 02

التمرين 01 : (02 ن)

* $Tr(A) = \sum_{k=1}^{2} a_{kk} = 1+(-2) = -1$ 0,5
* $\det(B) = (0\times 2) - (2\times(-1)) = 2$ 0,5
* $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}, (A+B)^t = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 1

التمرين 02 : (06 ن)

1) نلاحظ أن الشعاع المعدوم $(0,0,0)$ لا ينتمي إلى E_1 لأن 0,5

$0+0+0 = 0 \leq 1$ 01

ومنه E_1 ليست فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{R}^3$. 0,5

2) * لدينا : $(0,0,0) \in E_2$ لأن $z = 0$ 0,5

* التحقق من أن : $\forall X \in E_2, \forall Y \in E_2 \overset{?}{\Rightarrow} X+Y \in E_2$ 0,5

حيث

$X = (x_1, y_1, z_1)$ و $z_1 = 0$ 0,5

$Y = (x_2, y_2, z_2)$ و $z_2 = 0$

ومنه

1 .... $X+Y = (x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2) \Longrightarrow z_1 + z_2 = 0 \Rightarrow X+Y \in E_2$

* التحقق من أن : $\forall X \in E_2, \forall \alpha \in \mathbb{R} \overset{?}{\Rightarrow} \alpha X \in E_2$ 0,5

لدينا :

$\alpha X = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1)$

ومنه $\alpha X \in E_2$ لأن $\alpha z_1 = 0$ 0,5

النتيجة : E_2 هو ف ش ج من $\mathbb{R}_3$ 0,5

ملاحظة : تمكن توظيف الشرط بالشرط الكافي : $\forall X,Y \in E_2$, $\forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ $\Rightarrow \alpha X+\beta Y \in E_2$

وتوزع النقاط بنفس الطريقة

التمرين 03 : (06 ن)

1) $\det(A) = -1\begin{vmatrix}3 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix} = -3+4=1$ 1

ومنه $\det(A)\neq 0 \Longrightarrow$ A قابلة للقلب 0,5

2) $2A - A^2 \stackrel{?}{=} I_3$

$$2A=\begin{pmatrix}-2 & -4 & 0\\ 4 & 6 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix},\quad A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 0\\ 2 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -2 & 0\\ 2 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

0,5 ....

0,5 ....

0,5 .... $=\begin{pmatrix}-3 & -4 & 0\\ 4 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

ومنه

1 .... $2A-A^2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=I_3$

3) نلاحظ من العلاقة أن : $2I_3 - A = A^{-1}$ 1

ومنه

1 .... $A^{-1}=\begin{pmatrix}3 & 2 & 0\\ -2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

ملاحظة : يمكن حساب A^{-1} باستخدام القانون : $A^{-1}=\frac{1}{\det A}(\operatorname{com} A)^t$

وتوزع النقاط على كل خطوة .

التمرين 04: (06ن)

1) الشكل المصفوفي: $A X = B$ حيث

0,25 .... $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & a & 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

2) بما أن عدد أسطر A = عدد أعمدة A = 3 لكي تكون الجملة قابلة للحل يلزم: $\det(A) \neq 0$

0,25 .... $\det(A) = 3a - 1 \neq 0 \Rightarrow a \neq +1/3$

3) من أجل $a = 1$ لدينا $\det(A) = 2$

<u>طريقة كرامر الأولى:</u> نسمي المصفوفات

0,25 .... $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A_1) = 10$

0,25 .... $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -3 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A_2) = 16$

0,25 .... $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -3 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A_3) = 10$

ومنه:

0,25 .... $x = \dfrac{\det(A_1)}{\det(A)}$, $y = \dfrac{\det(A_2)}{\det(A)}$, $z = \dfrac{\det(A_3)}{\det(A)}$

إذن حلول الجملة:

0,25 .... $(x, y, z) = (5, 8, 5)$

طريقة كرامر الثانية:

لدينا $AX=B \Leftrightarrow X=A^{-1}B$ — 0,5

حساب A^{-1}:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}C^t$$ — 0,5

حيث

$$C=(-1)^{i+j}\det(\omega_{ij})$$

إذن

$$C=\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix}4&-3\\1&0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-3&-3\\-1&0\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}-3&4\\-1&1\end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix}1&-1\\1&0\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}0&-1\\-1&0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0&1\\-1&1\end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix}1&-1\\4&-3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0&-1\\-3&-3\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}0&1\\-3&4\end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

ومنه

$$C=\begin{pmatrix}3&3&1\\-1&-1&-1\\1&3&3\end{pmatrix} \Rightarrow C^t=\begin{pmatrix}3&-1&1\\3&-1&3\\1&-1&3\end{pmatrix}$$ — 0,5

و $$A^{-1}=\begin{pmatrix}3/2&-1/2&1/2\\3/2&-1/2&3/2\\1/2&-1/2&3/2\end{pmatrix}$$ — 0,5

إذن

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3&-1&1\\3&-1&3\\1&-1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\2\\3\end{pmatrix}$$

ومنه حلول الجملة

$$(x,y,z)=(5,8,5)$$ — 0,5