

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE & POPULAIRE  
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE  
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ LARBI BEN MHIDI  
FACULTÉ DES SCIENCES ET SCIENCES APPLIQUÉES



## Cours d'analyse numérique.

Master 01 Génie chimique.

realise par  
**Dr. Fatima Hadjabi**

**2021/2022**

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>4</b>
1.1	Modélisation du phénomène de transport . . . . .	6
1.1.1	Principe de conservation . . . . .	6
1.1.2	Equation de continuité . . . . .	6
1.1.3	Equation de l'énergie . . . . .	6
1.1.4	Equation de conservation d'espèce chimique . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Classification des équations différentielles aux dérivées partielles</b>	<b>8</b>
2.1	Classification au sens mathématique . . . . .	8
2.2	Classification au sens physique . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Méthodes de discrétisation</b>	<b>12</b>
3.1	Méthode des différences finies . . . . .	12
3.1.1	Méthode de différences finies pour les équations elliptiques . . . . .	13
3.1.2	Méthode de différences finies pour les équations hyperboliques . . . . .	17
3.1.3	Méthode de différences finies pour les équations paraboliques . . . . .	18
3.2	Méthode des volumes finis . . . . .	20
3.2.1	Méthode de volumes finis pour les équations elliptiques monodimensionnelles . . . . .	20
3.2.2	Méthode de volumes finis pour les équations elliptiques en 2D . . . . .	23
3.3	Méthode des éléments finis . . . . .	25
3.3.1	Méthode de éléments finis pour les équations elliptiques . . . . .	26
<b>4</b>	<b>Équations elliptiques</b>	<b>33</b>
4.1	Conduction 1D en régime stationnaire . . . . .	33
4.1.1	Méthode de TDMA . . . . .	34
4.2	Conduction 2D et 3D . . . . .	36

4.2.1	Résolution des équations algébriques par la méthode de Gauss Seidel	36
4.2.2	Résolution des équations algébriques par la méthode de relaxation	38

<b>Références</b>		<b>41</b>
-------------------	--	-----------

# Chapitre 1

## Introduction

L'analyse numérique est la conception et l'étude d'algorithmes pour des solutions à des ensembles des équations issues de modèles de la physique et d'autres domaines...

Pour traiter tout phénomène physique (ou chimique) on peut utiliser :

- L'approche analytique.
- L'expérience.
- L'approche numérique.

### L'approche numérique (Le calcul numérique)

Le modèle mathématique constitué des équations différentielles partielles (EDP) peut être transformé à l'aide d'une méthode de discrétisation en un système d'équations algébriques.

Par définition la discrétisation est une opération qui consiste à remplacer des relations entre des fonctions continues dérivables par un nombre fini de relations algébriques.

**Avantages** Les avantages de cette approche sont :

- faible coût.
- Rapidité.
- Valable pour tous les modèles physiques ayant un modèle mathématique.

**Inconvénients** Pour les inconvénients on peut citer

- Moins précise par rapport aux autres méthodes.
- Parfois plus coûteuse lorsque les capacités de stockage sont très grandes ou bien le temps de calcul devient important.

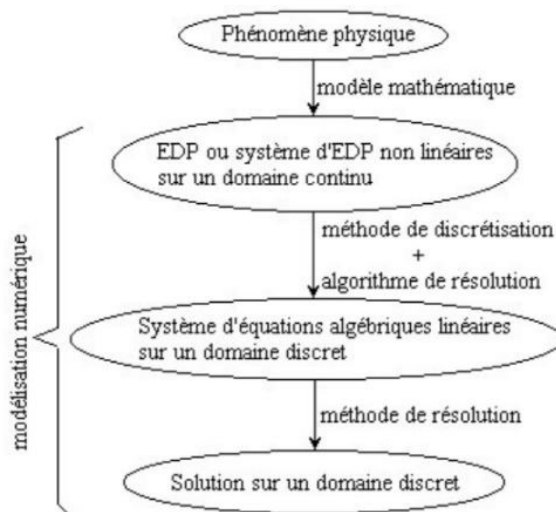


FIGURE 1.1 – Le principe du calcul numérique.

## Les équations aux dérivées partielles (EDP)

Une équation aux dérivées partielles (ou simplement EDP) est une équation dont l'inconnue est une fonction et partant sur les dérivées partielles de cette fonction.

Si on note

$$y : \mathbb{R}^n (\Omega \text{ un ouvert dans } \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R} \quad (1.1)$$

$$x \quad \mapsto y(x)$$

Alors l'équation s'écrit sous la forme :

$$F(x, y(x), Dy(x), \dots, D^p y(x)) = 0, \quad n, p \in \mathbb{N}^*, \quad (1.2)$$

où  $p$  : est appelé l'ordre de l'EDP, et

$$F : \mathbb{R}^n \star \mathbb{R}^{n^2} \star \dots \mathbb{R}^{n^p} \text{ est une fonction donnée.} \quad (1.3)$$

Les EDP proviennent de la modélisation mathématique, cád la transcription en équations, de problèmes intervenant dans tous les domaines des sciences : physique, chimie, finance,....

## 1.1 Modélisation du phénomène de transport

Un phénomène de transport (phénomène de transfert) est un phénomène irréversible durant lequel une grandeur physique est transportée par le biais de molécules et qui a pure origine l'inhomogénéité d'une grandeur intensive. C'est la tendance spontanée des systèmes physiques et chimiques à rendre uniforme ces grandeurs qui provoquent le transport.

### 1.1.1 Principe de conservation

Pour un changement chimique, le principe de la conservation indique que la masse des réactifs et des produits restera la même, car les mêmes atomes au début et la fin de la réaction. Il se produira un réarrangement des atomes pour former des nouvelles molécules à la fin de la réaction.

**Résultat** : Le principe de la conservation indique que la masse des réactifs est égale à la masse des produits.

### 1.1.2 Equation de continuité

Le principe de conservation de masse peut être formulé comme suit : L'accumulation de masse dans un volume donné par unité de temps est égale à la différence entre les masses qui entrent et celles qui sortent du volume. Il est exprimé par l'équation de continuité comme suit :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla \cdot \varphi \vec{V} = 0. \quad (1.4)$$

### 1.1.3 Equation de l'énergie

L'équation de l'énergie s'écrit comme suit :

$$\varphi C_P \frac{DT}{Dt} = \nabla \cdot (k \nabla T) + q + \mu \phi. \quad (1.5)$$

En coordonnées cartésiennes, l'expression de la dissipation visqueuse s'écrit :

$$\phi = 2\mu\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right] + \eta\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 \quad (1.6)$$

#### 1.1.4 Equation de conservation d'espèce chimique

$$\frac{\partial(\rho Y_i)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho V Y_i) = -\nabla \cdot \vec{J}_i + R_i + S_i, \quad (1.7)$$

avec :

$Y_i$  : est la fraction massique locale de l'espèce chimique  $i$ ,

$\vec{J}_i$  : C'est le flux de diffusion de l'espèce  $i$ ,

$R_i$  : remplace le taux net de production de l'espèce  $i$  par réaction chimique,

$S_i$  : Le taux création par addition de la phase dispersée et autres sources,

$\rho$  : signifie la masse volumique.

# Chapitre 2

## Classification des équations différentielles aux dérivées partielles

### La forme générale des équations aux dérivées partielles

Une équation aux dérivées partielles du deuxième ordre est donnée (en coordonnées cartésiennes) sous la forme

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G, \quad (2.1)$$

où les coefficients  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$ ,  $F$ ,  $G$  sont des fonctions de deux variables (Elles dépendent seulement de  $x$ ,  $y$ ). La classification est faite sur la base de ces coefficients.

L'EDP est dite linéaire si  $u$  est linéaire par rapport à variables et ses dérivées partielles, et si les coefficients qui les lient ne dépendent que de  $(x, y)$ ; sinon elle est non linéaire.

### 2.1 Classification au sens mathématique

Considérant l'EDP (3.8), et posant

$$\Delta = B^2 - 4AC. \quad (2.2)$$

Alors



- l'EDP est dite **hyperbolique** si  $\Delta > 0$ .
- L'EDP est dite **parabolique** si  $\Delta = 0$ .
- L'EDP est dite **elliptique** si  $\Delta < 0$ .

**Exemples 2.1.1** *On considère  $u$  une fonction à deux variables.*

1).  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial u}{\partial x} + u = x$  est de type parabolique ( $\Delta = 0$ ).

2).  $y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + u = 0$  est de type hyperbolique si  $y > 0$ , parabolique si  $y = 0$ , et de type elliptique pour  $y < 0$  ( $\Delta = 4y$ ).

**Exemples 2.1.2** — *L'équation de la chaleur (de diffusion)*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

*est parabolique.*

— *L'équation des ondes*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

*est hyperbolique.*

— *L'équation de Laplace*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

*est elliptique.*

### Classification mathématique dans le cas générale ( $p$ variables indépendantes)

Si  $u$  est une fonction de  $p$  variables indépendantes, les EDP linéaires du second ordre sont du type :

$$\sum_{i=1}^p A_i(x_1, \dots, x_p) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \sum_{i=1}^p B_i(x_1, \dots, x_p) \frac{\partial u}{\partial x_i} + C(x_1, \dots, x_p)u + D(x_1, \dots, x_p) = 0. \quad (2.3)$$

Si tous les  $A_i$  sont non nuls et de même signe, l'EDP est de type elliptique.

Si tous les  $A_i$  sont non nuls et sont ; à une exception près, de même signe, l'EDP est de

type hyperbolique.

Si un seul des  $A_i$  est nul et tous les autres de même signe et si l'un des  $B_i$  est non nul, l'EDP est de type parabolique.

## 2.2 Classification au sens physique

La classification au sens physique des équations aux dérivées partielles peut être dévisée en deux grandes catégories.

- Les équations qui modélisent **des problèmes d'état d'équilibre** ou **stationnaire** appartiennent à la classe dite des problèmes elliptiques. L'équation de Laplace et celle de Poisson font partie de cette classe.
- La deuxième classe est celle **des problèmes d'évolution** dont les solutions dépendent du temps, c'est-à-dire les équations de type parabolique et de type hyperbolique.

**Exercice 1** *Quel est le type de chaque équation :*

- 1).  $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ , où  $a \in \mathbb{R}$ .
- 2).  $\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 3 \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ , où  $c \in \mathbb{R}$ .
- 3).  $x \frac{\partial u}{\partial x} - 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ .
- 4).  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + y \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ .

### Conditions aux limites

Les conditions aux limites (ou conditions aux bords) sont les contraintes sur les valeurs que prennent la solution des EDP sur une frontière  $\Omega$  (si  $\Omega \in \mathbb{R}$  est un intervalle ouvert  $]a, b[$ , dans ce cas  $\partial\Omega = \{a, b\}$ ). On se base dans notre cours sur trois types.

#### Conditions aux limites de Dirichlet

Ce type de conditions est imposé à l'équation (1.2) lorsqu'on spécifie les valeurs que la solution doit vérifier sur les frontières du domaine  $\Omega$ . c'est à dire, si on pose  $f$ , une

fonction définie sur  $\partial\Omega$ , alors

$$u(x) = f(x) \quad \forall x \in \partial\Omega. \quad (2.4)$$

**Exemples 2.2.1** *On considère une plaque d'épaisseur  $L$ . On suppose que la surface de la frontière à  $x = 0$  est maintenue à la température uniforme  $T_1$ , et la surface de frontière  $x = T$  à la température uniforme  $T_2$ . Dans ce cas les conditions aux bords peuvent être comme suit*

$$\begin{cases} u(0, t) = T_1, & t > 0 \\ u(T, t) = T_2. \end{cases} \quad (2.5)$$

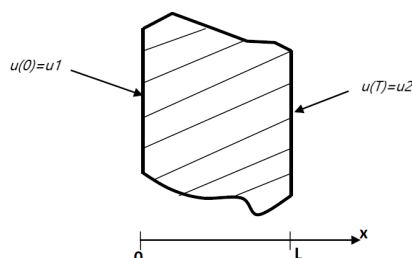


FIGURE 2.1 – Les conditions aux limites de Dirichlet.

### Conditions aux limites de Newmann

Ce type de conditions est appliquée à une équation (1.2) lorsqu'on spécifie les valeurs que la solution doit vérifier sur les frontières. Soit  $g$  une fonction définie sur  $\partial\Omega$  et telle qu'en tout point  $x \in \partial\Omega$  on a

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = g(x), \quad (2.6)$$

$\vec{n}$  est le vecteur normal à  $\partial\Omega$ .

### Conditions aux limites mixtes

Il s'agit d'une relation linéaire entre les valeurs de la fonction et les valeurs de la dérivée de la fonction sur le bord du domaine. Posant  $h$  définie sur  $\Omega \cup \partial\Omega$ , pour tout  $x \in \Omega \cup \partial\Omega$

$$\alpha_1(x)u(x) + \alpha_2(x)\frac{\partial u(x)}{\partial \vec{n}}(x) = h(x). \quad (2.7)$$

# Chapitre 3

## Méthodes de discrétisation

Pour résoudre un problème des équations aux dérivées partielles les données suivantes sont nécessaires

- Définir un domaine  $\Omega$ .
- Une équation aux dérivées partielles.
- Des conditions aux limites (et des conditions initiales si le problème est d'évolution).

Pour obtenir une approximation numérique de la solution de ce problème, nous devons approcher les dérivées partielles de l'EDP en chaque noeud du domaine discrétisé (maillage) en utilisant les valeurs de la variable dépendante en ce noeud et aux noeuds avoisinants.

### 3.1 Méthode des différences finies

Cette méthode est fournie aux problème aux limites afin d'obtenir une solution approchée, sur un maillage, en se basant sur la discrétisation de l'opérateur différentiel  $\frac{\partial}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \dots$

Le principe de cette méthode est la discrétisation du domaine de calcul un nombre fini de points sur lesquels on approche les opérateurs de dérivation des équations modèles par des développements en séries de Taylor tronquées à l'ordre de précision choisie.

### 3.1.1 Méthode de différences finies pour les équations elliptiques

#### Résolution du problème de Dirichlet homogène

On choisit comme un modèle, le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} -y'' = f(x), & \text{si } x \in ]0,1[ \\ y(0) = y(1) = 0, \end{cases} \quad (3.1)$$

où  $f$  est une fonction continue sur  $[0, 1]$ .

On commence par choisir un entier  $N \geq 1$  et on divise l'intervalle  $[0; 1]$  en  $(N + 1)$  sous-intervalles dont les extrémités sont les points du maillage.

$$x_i = ih, \quad i = 1, \dots, N + 1, \quad h = \frac{1}{N + 1}. \quad (3.2)$$

Le pas  $h$  est choisi constant pour faciliter l'utilisation des algorithmes servant à résoudre les systèmes linéaires qui résultent de l'approximation et qui font intervenir une matrice de dimension  $N \times N$ .

On utilise maintenant le développement de Taylor au point  $x_i$  pour remplacer  $y''$ . Evidemment, si  $y$  est de classe  $\mathcal{C}^4([0, 1])$ , alors :

$$y''(x_i) = \frac{1}{h^2}(y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1}))) - \frac{h^2}{12}y^{(4)}(\xi_i), \quad \xi_i \in [x_{i-1}, x_{i+1}]. \quad (3.3)$$

On néglige le terme contenant  $\xi_i$  dans la formule précédente et on note  $y_i$  une approximation de  $y$  au point  $x_i$ .

On revient au problème (3.1), on obtient finalement la méthode des différences finies suivante

$$\begin{aligned} y_0 = 0, \quad y_{N+1} = 0, \\ -y_{i-1} + 2y_i - y_{i+1} = h^2 f(x_i), \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (3.4)$$

l'erreur de troncature dans ce cas est d'ordre  $\mathcal{O}(h^2)$ .

Le schéma numérique (3.4) s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$MY_h = b_h, \quad (3.5)$$

où la matrice  $M$  est donnée par

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

tandis que  $Y_h$  et  $b_h$  sont des vecteurs dans  $\mathbb{R}^n$ , on a :

$$Y_h = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{N-1} \\ y_N \end{pmatrix} \text{ et } b_h = h^2 \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{N-1}) \\ f(x_N) \end{pmatrix}.$$

**Exemples 3.1.1** Résoudre le problème de Dirichlet suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = x, \\ T(0) = 0, \quad T(1) = 0. \end{cases}$$

Le développement de Taylor de  $T$  est

$$\frac{T_{i-1} - 2T_i + T_{i+1}}{\Delta x^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2},$$

dans ce cas  $\Delta x$  désigne  $h$ .

Posant  $T_0 = 0$  et  $T_5 = 0$  ( $N = 4$ ).

### Résolution du problème de Dirichlet non homogène

On considère le problème linéaire du second ordre suivant

$$\begin{cases} y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), \quad x \in ]0, 1[, \\ y(0) = \alpha, \quad y(1) = \beta. \end{cases}$$

$p, q, r$ , sont des fonctions continues sur  $[0, 1]$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux nombres réels.

Pour trouver la solution approchée du problème (3.1.1) par la méthode des différences finies, on commence par diviser l'intervalle  $[0, 1]$  en  $N + 1$  sous-intervalles comme suit

$$x_i = ih, \quad i = 1, \dots, N + 1, \quad h = \frac{1}{N+1}.$$

Supposant  $y \in \mathcal{C}^4([0, 1])$ , en utilisant le développement de Taylor de  $y$  au point  $x_i$ , on trouve

$$y''(x_i) = \frac{1}{h^2}(y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1}))) - \frac{h^2}{24}y^{(4)}(\xi_i), \quad \xi_i \in [x_{i-1}, x_{i+1}], \quad (3.6)$$

et

$$y'(x_i) = \frac{1}{2h}(y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}))) - \frac{h^2}{6}y^{(3)}(\kappa_i), \quad \kappa_i \in [x_{i-1}, x_{i+1}]. \quad (3.7)$$

On néglige dans les relations (3.6) et (3.7) les termes contenant les dérivées de  $y$  aux points inconnus  $\xi_i$  et  $\kappa_i$  et tenant compte les conditions aux limites, on obtient la méthode aux différences finies suivante avec une erreur de troncature d'ordre  $o(h^2)$

$$\begin{cases} y_0 = \alpha, & y_{N+1} = \beta, \\ \frac{1}{h^2}(-y_{i+1} + 2y_i - y_{i-1}) + p(x_i)\frac{1}{2h}(y_{i+1} - y_{i-1}) + q(x_i)y_i = -r(x_i), & i = 1, \dots, N. \end{cases}$$

L'équation précédente peut être réécrite comme suit

$$-(1 + \frac{h}{2}p(x_i))y_{i-1} + (2 + h^2q(x_i))y_i - (1 - \frac{h}{2}p(x_i))y_{i+1} = -h^2r(x_i), \quad i = 1, \dots, N,$$

ou d'une manière plus simple

$$-(1 + \frac{h}{2}p_i)y_{i-1} + (2 + h^2q_i)y_i - (1 - \frac{h}{2}p_i)y_{i+1} = -h^2r_i, \quad i = 1, \dots, N.$$

Cette dernière peut être écrite sous forme un système linéaire  $MY_h = b_h$ ,  $M \in \mathcal{M}(N)$ , avec

$$M = \begin{pmatrix} 2 + h^2q_1 & -1 + \frac{h}{2}p_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 + \frac{h}{2}p_2 & 2 + h^2q_2 & -1 + \frac{h}{2}p_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 + \frac{h}{2}p_3 & 2 + h^2q_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 + h^2q_{N-1} & -1 + \frac{h}{2}p_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 + \frac{h}{2}p_{N-1} & 2 + h^2q_N \end{pmatrix},$$

$$Y_h = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{N-1} \\ y_N \end{pmatrix} \text{ et } b_h = h^2 \begin{pmatrix} -h^2r_1 + (1 + \frac{h}{2} + p_1)\alpha \\ -h^2r_2 \\ \vdots \\ -h^2r_{N-1} \\ -h^2r_N + (1 + \frac{h}{2} + p_N)\beta \end{pmatrix}.$$

**Exemples 3.1.2** Résoudre le problème de Dirichlet non homogène suivant

$$\begin{cases} \frac{d^2 y}{dx^2} = x, \\ y(0) = 1, \quad y(1) = 2. \end{cases}$$

### Résolution du problème de Dirichlet en 2 dimensions

Le principe dans le cas des problèmes de dimensions supérieure à 1 est le même que celui utilisé dans le cas d'une seule dimension, et les étapes sont complètement analogues.

On cherche à résoudre numériquement le problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \Omega = ]0, 1[ \times ]0, 1[ \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où  $u = u(x, y)$ , et  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  désigne le laplacien.

Le maillage de  $\Omega$  est présenté par

$$x_i = ih \quad y_j = jh \quad i, j = 0, \dots, N + 1,$$

où

$$h = \frac{1}{N + 1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Maintenant, en utilisant toujours le développement de Taylor (pour les fonctions à plusieurs variables), on trouve

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) = \frac{u(x_{i-1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i+1}, y_j)}{h^2}, \quad (3.8)$$

et

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j) = \frac{u(x_i, y_{j-1}) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j+1}))}{h^2}. \quad (3.9)$$

De (3.8) et (3.9), le schéma numérique de  $u$  peut être considéré comme :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) = \frac{-4u(x_i, y_j) + u(x_{i-1}, y_j) + u(x_{i+1}, y_j) + u(x_i, y_{j-1}) + u(x_i, y_{j+1}))}{h^2}, \quad (3.10)$$

ou simplement

$$\Delta_h u_{i,j} = \frac{-4u_{i,j} + u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1}}{h^2}. \quad (3.11)$$



Avec la notation (3.20), on peut définir le problème discrétisé

$$\begin{cases} -\Delta_h u_{i,j} = f_{i,j}, & i, j = 1, \dots, N, \\ u_{0,j} = u_{N+1,j} = u_{i,0} = u_{i,N+1} = 0. \end{cases}$$

**Remarque 3.1.1** On peut choisir deux pas différents pour  $x$  et  $y$ , disant  $h$  et  $k$ , alors  $h = \frac{1}{N+1}$ ,  $k = \frac{1}{M+1}$ .

### 3.1.2 Méthode de différences finies pour les équations hyperboliques

Il y a deux types essentiels dans ce cas : explicite et implicite.

Soit l'équation des ondes :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ u(x, 0) = f(x), \quad \forall x \in [0, a], \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x). \end{cases}$$

#### Méthode explicite

Toujours, on utilise les mêmes étapes de discrétisation, on trouve

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} = \frac{1}{c^2} \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2}.$$

Le problème des ondes discrétisé est donné par

$$\begin{cases} u_{i,j+1} = -u_{i,j-1} + 2(1 - \lambda)u_{i,j} + \lambda(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}), & \lambda = c^2 \frac{k^2}{h^2} \\ \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2k} = g_i. \end{cases}$$

Pour  $j = 0$  on a

$$u_{i,1} = -u_{i,-1} + 2(1 - \lambda)u_{i,0} + \lambda(u_{i+1,0} + u_{i-1,0}),$$

puisque

$$u_{i,1} - u_{i,-1} = g_i,$$

alors

$$u_{i,-1} + 2kg_i = -u_{i,-1} + 2(1 - \lambda)u_{i,0} + \lambda(u_{i+1,0} + u_{i-1,0}),$$

d'où

$$u_{i,-1} = -kg_i + (1 - \lambda)u_{i,0} + \frac{\lambda}{2}(u_{i+1,0} + u_{i-1,0}),$$

ce qui donne

$$u_{i,1} = kg_i + (1 - \lambda)u_{i,0} + \frac{\lambda}{2}(u_{i+1,0} + u_{i-1,0}).$$

Pour trouver la solution complète de ce problème il faut imposer les conditions aux limites pour  $x$  ( $x = 0$ , et  $x = a$ ).

**Remarque 3.1.2** *Pour que la solution soit stable il faut que  $k < \frac{h}{c}$ . Pour cette raison, on doit employer la méthode implicite, si on désire calculer  $u$  en des pas grandes.*

### Méthode implicite

En prend en considération que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 u(x_{i,j+1})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x_{i,j-1})}{\partial x^2} \right),$$

pour trouver

$$\frac{\lambda}{2}u_{i+1,j+1} + (1 + \lambda)u_{i,j+1} - \frac{\lambda}{2}u_{i-1,j+1} = 2u_{i,j} + \frac{\lambda}{2}(u_{i+1,j-1} - 2u_{i,j-1} + u_{i-1,j-1}).$$

Il est évident que la méthode est stable pour n'importe quelle valeur de  $k = jt$ , ce qui donne l'avantage à cette méthode.

### 3.1.3 Méthode de différences finies pour les équations paraboliques

Pour la résolution de ce type des équations, il existe deux types de base : Méthode explicite de résolution, et la méthode implicite de résolution.

La forme générale des équations paraboliques est :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x) \frac{\partial u}{\partial x} + c(x)u(x) + d(x), \quad x \in [a, b], \quad (3.12)$$

avec des conditions aux limites de Dirichlet

$$u(a, t) = u_a(t) \quad u(b, t) = u_b(t),$$

et des conditions initiales

$$u(x, 0) = u_0(x).$$

Le maillage de l'intervalle  $[a, b]$  est toujours  $x_i = ih$ , avec  $h = \frac{a}{N+1}$ .

### Méthode explicite

Après utiliser le développement de Taylor sur la fonction  $u(x, t)$ , on obtient

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} = a_i \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + b_i \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} + c_i u_{i,j} + d_i, \quad i = 1, \dots, N,$$

ce qui donne

$$u_{i,j+1} = \left(\frac{a_i k}{h^2} + \frac{b_i k}{2h}\right) u_{i-1,j} + \left(1 + \frac{2a_i k}{h^2} + c_i k\right) u_{i,j} + \left(\frac{a_i k}{h^2} + \frac{b_i k}{2h}\right) u_{i+1,j} + d_i k.$$

La méthode s'applique sans aucune modification de principe aux équations dont les coefficients  $a, b, c, d$  dépendent non seulement de  $x$  mais aussi de  $t$  et  $u$  ainsi qu'aux fonctions de plusieurs variables d'espace.

La méthode explicite nécessite une condition de choisir  $k \rightarrow 0$  suffisamment petit pour que la solution soit stable. C'est pour cela, il est préférable d'utiliser la méthode implicite.

### Méthode implicite

Le principe de cette méthode est d'écrire le second terme de l'équation (3.12) à l'instant  $t_{j+1}$  où la solution est inconnue. On utilise les différences à gauche pour trouver

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} = a_i \frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}}{h^2} + b_i \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1}}{2h} + c_i u_{i,j+1} + d_i, \quad i = 1, \dots, N,$$

On obtient finalement

$$\left(\frac{a_i}{h^2} + \frac{b_i}{2h}\right)u_{i-1,j+1} - \left(\frac{1}{k} + \frac{2a_i}{h^2} - c_i\right)u_{i,j+1} + \left(\frac{a_i}{h^2} + \frac{b_i}{2h}\right)u_{i+1,j+1} = -\left(\frac{u_{i,j}}{k} + d_i\right).$$

On a  $(n+2)$  inconnus mais on a  $n$  équations, on remplace donc les conditions aux limites  $u_{0,1}$ ,  $u_{N+1,1}$  par leur valeurs, on aura alors un système de  $n$  équations à  $n$  inconnus.

## 3.2 Méthode des volumes finis

Contrairement à la méthode des différences finies qui met en jeu des approximations des dérivées, les méthodes des volumes finis et des éléments finis exploitent des approximations d'intégrales.

L'équation aux dérivées partielles est résolue de manière approchée à l'aide d'un maillage constitué de volumes finis qui sont des petits volumes disjoints en 3D (des surfaces en 2D, des segments en 1D) dont la réunion constitue le domaine d'étude.

Un avantage de la méthode des Volumes Finis par rapport à la méthode des Différences Finies est qu'elle permet de résoudre des EDP avec des géométries complexes dans la mesure où elle utilise des maillages non-structurés.

### 3.2.1 Méthode de volumes finis pour les équations elliptiques monodimensionnelles

Considérant le problème elliptique en 1D défini sur l'intervalle  $[0, 1]$ .

$$\begin{cases} -u'' = f(x), & \text{si } x \in ]0, 1[ \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \quad (3.13)$$

où  $f$  est une fonction continue sur  $[0, 1]$ .

— On décritise l'intervalle  $[0, 1]$  en introduisant un maillage défini comme suit :

$$k_i = ]x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}[, \quad i = 1, \dots, N,$$

où  $x_{i+\frac{1}{2}} \in [0, 1]$  tels que  $0 < x_0 = x_{\frac{1}{2}} < x_{\frac{3}{2}} < \dots < x_{i-\frac{N}{2}} < x_{N+\frac{1}{2}} = x_{N+1} = 1$ ,

$k_i$  est appelé volume de contrôle ou cellule.

$x_i$  est le point centre associé à la cellule  $k_i$ .

Le pas de décritiastion  $h_i$  est défini par

$$h_i = |k_i| = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}},$$

$$h_{i+\frac{1}{2}} = x_{i+1} - x_i.$$

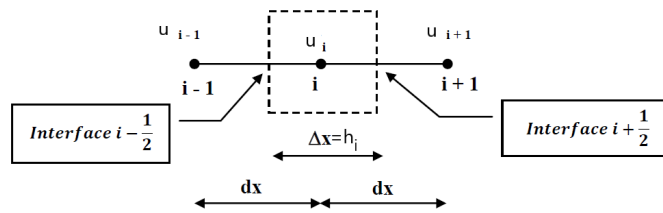


FIGURE 3.1 – Le volume de contrôle.

On pose, dans chaque cellule  $k_i$ , la solution approchée de la solution du problème (3.13) :

$$u_i \simeq \frac{1}{|k_i|} \int_{k_i} u(x) dx = \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} u(x) dx, \quad 1 \leq n \leq N.$$

— On intègre l'équation différentielle de (3.13) sur chaque cellule  $k_i$

$$- \int_{k_i} u''(x) dx = \int_{k_i} f(x) dx$$

$$-u'(x_{i+\frac{1}{2}}) + u'(x_{i-\frac{1}{2}}) = h_i f_i$$

où  $f_i$  désigne la discrétisation  $f$  dans  $k_i$ , i.e.,  $f_i = \frac{1}{h_i} \int_{k_i} f(x) dx$ . La quantité  $-u'(x_{i+\frac{1}{2}})$  (respectivement  $-u'(x_{i-\frac{1}{2}})$ ) représente le flux rentrant (respectivement flux sortant) associé à la cellule  $k_i$  au point  $x = x_{i+\frac{1}{2}}$  (respectivement  $x = x_{i-\frac{1}{2}}$ ).

On approche maintenant le flux  $-u'(x_{i+\frac{1}{2}})$  par différences centrées :

$$-u'(x_{i+\frac{1}{2}}) \simeq -\frac{u(x_{i+\frac{1}{2}}) - u(x_i)}{x_{i+\frac{1}{2}} - x_i},$$

ou

$$-u'(x_{i+\frac{1}{2}}) \simeq -\frac{u(x_{i+\frac{1}{2}}) - u(x_{i+1})}{x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i+1}}.$$

Ces deux dernières formules traduisent la consistance de flux. Du fait des décentrement, il s'agit d'approximations d'ordre  $O(h)$ , avec  $h = \max(h_i)$ .

Au point  $x = x_i$ , on introduit le flux numérique  $F_{i+\frac{1}{2}}^-$  associé à la cellule  $k_i$ , et  $F_{i+\frac{1}{2}}^+$  associé à la cellule  $k_{i+1}$ , c'est à dire

$$F_{i+\frac{1}{2}}^- = -\frac{u_{i+\frac{1}{2}} - u_i}{x_{i+\frac{1}{2}} - x_i} ; \quad F_{i+\frac{1}{2}}^+ = -\frac{u_{i+\frac{1}{2}} - u_{i+1}}{x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i+1}}.$$

On impose alors la conservation des flux numériques à travers  $x = x_{i+\frac{1}{2}}$

$$F_{i+\frac{1}{2}}^- = F_{i+\frac{1}{2}}^+.$$

On obtient donc

$$F_{i+\frac{1}{2}}^- = F_{i+\frac{1}{2}}^+ = -\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{x_{i+1} - x_i} = -\frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+\frac{1}{2}}}.$$

Le schéma numérique correspondant à l'approximation peut être décrit comme suit

$$\begin{cases} -\frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+\frac{1}{2}}} + \frac{u_i - u_{i-1}}{h_{i-\frac{1}{2}}} = h_i f_i, & i=1, \dots, N \\ u_0 = u_{N+1} = 0, \end{cases} \quad (3.14)$$

Si le système est linéaire, alors le problème numérique (3.14) s'écrit sous forme matricielle  $Au_h = b'$  où  $A \in \mathcal{M}(N)$ , avec

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \beta_1 & \alpha_2 & \beta_2 & \cdots & 0 \\ 0 & \beta_2 & \alpha_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \beta_{N-1} & \alpha_{N-1} \end{pmatrix},$$

où

$$\alpha_i = \frac{1}{h_{i-\frac{1}{2}}} + \frac{1}{h_{i+\frac{1}{2}}} > 0, \quad \beta_i = -\frac{1}{h_{i+\frac{1}{2}}},$$

$$u_h = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{pmatrix} \text{ et } b_h = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-1} \\ f_N \end{pmatrix}.$$

### 3.2.2 Méthode de volumes finis pour les équations elliptiques en 2D

On cherche à déterminer la solution de l'équation de diffusion par la méthode de volumes finis dans un domaine polygonal  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . On cherche une fonction  $u = u(x)$  définie pour  $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ , vérifiant

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}(\Gamma \frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\Gamma \frac{\partial u}{\partial y}) + S_u = 0, & \text{dans } \Omega \\ u(0) = g, & \text{sur le bord } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.15)$$

La partition du domaine  $\Omega$ , sur lequel l'équation (3.18) est définie, est présenté dans la figure suivante (Figure 3.2.2)

Par rapport le cas monodimensionnel, on a rajouté deux noeuds supplémentaires notés (N) et (S).

L'intégration de l'équation (3.18) sur le volume finis autour de  $P$  s'écrit

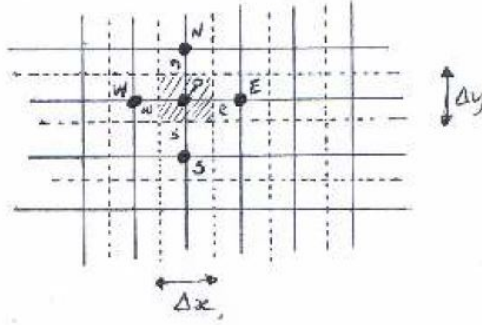


FIGURE 3.2 – Cellule d'un maillage de volumes finis en 2D.

$$\int_{\Delta V} \frac{\partial}{\partial x} \left( \Gamma \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx dy + \int_{\Delta V} \frac{\partial}{\partial y} \left( \Gamma \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy + \int_{\Delta V} S_u dV = 0. \quad (3.16)$$

On pose  $A_e = A_w = \Delta y$ , et  $A_n = A_s = \Delta x$ , on obtient

$$\left[ \Gamma_e A_e \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_e - \Gamma_w A_w \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_w \right] + \left[ \Gamma_n A_n \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_n - \Gamma_s A_s \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_s \right] + \bar{S} \Delta V = 0. \quad (3.17)$$

On utilise l'approximation introduite précédemment les différents termes de l'équation (3.17) s'écrivent :

$$\begin{aligned} \Gamma_e A_e \frac{\partial \Gamma u}{\partial x} \Big|_e &= \Gamma_e A_e \frac{(u_E - u_P)}{\delta x_{PE}} \\ \Gamma_w A_w \frac{\partial \Gamma u}{\partial x} \Big|_w &= \Gamma_w A_w \frac{(u_P - u_w)}{\delta x_{Pw}} \\ \Gamma_n A_n \frac{\partial \Gamma u}{\partial y} \Big|_n &= \Gamma_n A_n \frac{(u_N - u_P)}{\delta x_{PN}} \\ \Gamma_s A_s \frac{\partial \Gamma u}{\partial y} \Big|_s &= \Gamma_s A_s \frac{(u_P - u_s)}{\delta x_{Ps}}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Le terme source est linéarisé comme suit :

$$\bar{S} \Delta V = S_u + S_p u_p. \quad (3.19)$$

L'équation (3.17) s'écrit comme suit

$$\Gamma_e A_e \frac{u_E - u_P}{\delta x_{PE}} - \Gamma_w A_w \frac{u_P - u_w}{\delta x_{wP}} + \Gamma_n A_n \frac{u_N - u_P}{\delta x_{PN}} - \Gamma_s A_s \frac{u_P - u_s}{\delta x_{sP}} + \bar{S} \Delta V = 0. \quad (3.20)$$



L'équation (3.20) peut être réécrite comme suit :

$$\left[ \frac{\Gamma_w A_w}{\delta x_{wP}} + \frac{\Gamma_e A_e}{\delta x_{PE}} + \frac{\Gamma_s A_s}{\delta x_{sP}} + \frac{\Gamma_n A_n}{\delta x_{PN}} - S_P \right] u_P = \left( \frac{\Gamma_w A_w}{\delta x_{wP}} \right) u_w + \left( \frac{\Gamma_e A_e}{\delta x_{PE}} \right) u_E + \left( \frac{\Gamma_s A_s}{\delta x_{sP}} \right) u_s + \frac{\Gamma_n A_n}{\delta x_{PN}} u_N + S_u, \quad (3.21)$$

ou de manière générale :

$$a_p u_p = a_w u_w + a_E u_E + a_s u_s + a_N u_N + S_u, \quad (3.22)$$

avec

$$\begin{aligned} a_w &= \frac{\Gamma_w A_w}{\delta x_{wP}}; & a_E &= \frac{\Gamma_e A_e}{\delta x_{PE}} \\ a_s &= \frac{\Gamma_s A_s}{\delta y_{sP}}; & a_N &= \frac{\Gamma_n A_n}{\delta y_{PN}}; \\ a_p &= a_w + a_E + a_s + a_n - S_p. \end{aligned} \quad (3.23)$$

L'équation (3.2.2) est écrite pour chaque noeud du domaine discretisé en tenant compte des conditions aux limites, un système d'équations algébriques en résulte, sa résolution permet de calculs  $u$  aux limites aux différents noeuds.

### 3.3 Méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis (MEF) permet de résoudre de manière discrète une EDP dont on cherche une solution approchée "suffisamment" fiable. De manière générale, cette EDP porte sur une fonction  $u$ , définie sur un domaine. Elle comporte des conditions aux bords permettant d'assurer l'existence et l'unicité d'une solution.

Une fois le choix de la géométrie approchée est terminée, l'espace d'approximation de la solution du problème, dans la MEF, est défini à l'aide du maillage du domaine. Le maillage du domaine d'en définir un pavage dans les pavés sont les éléments finis. Un élément fini est donc la donnée d'une cellule élémentaire et de fonctions de base de l'espace d'approximation.

#### Avantages de la méthode des éléments finis :

La MEF présente des avantages par rapport aux autres méthodes numériques :

Elle est applicable à tout type de problèmes dit de champs, de transfert thermiques,....

Elle n'impose aucune restriction géométrique, le corps ou le domaine à modéliser peut avoir une forme quelconque.

L'approximation peut être facilement améliorée en développant la taille du maillage en augmentant le nombre d'éléments.

### 3.3.1 Méthode de éléments finis pour les équations elliptiques

#### Dèscription de la méthode MEF pour un problème de Dirichlet

On est intéressé à chercher la solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{dans } \Omega \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.24)$$

où  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction "sufisamment" régulière (on prend  $f \in C(\Omega)$ ).

On note que l'équation dans le problème (3.32) vaut  $-\Delta u(x, y) = f(x, y) \quad \forall (x, y) \in \Omega$ .

On suppose que  $f \in C(\bar{\Omega})$  ( $C(\bar{\Omega})$  désigne l'ensemble des fonctions continues sur  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ ).

Pour appliquer la MEF, on va plus considérer  $u \in \Omega$ ; un nouveau sous espace  $V \subset \Omega$  des éléments  $v$  est introduit; où  $v$  est une fonction de classe  $C^2(\bar{\Omega})$ .

Soit  $v \in V = v \in \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . On multiplie (3.32) par  $v$ , et on intègre sur  $\Omega$

$$-\int_{\Omega} \Delta u v = \int_{\Omega} f v. \quad (3.25)$$

À cet étape, on est besoin d'introduire la formule de **Green**

$$-\int_{\Omega} \Delta u v = + \int_{\Omega} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} v,$$

où le gardient  $\vec{\nabla} u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n})$ . Cette formule est la généralisation de la formule de l'intégration par parties.

On revient à notre équation (3.25) et on applique la formule de Green pour trouver :

$$\int_{\Omega} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} v = \int_{\Omega} f v., \quad \forall v \in V. \quad (3.26)$$

On rajoute à l'espace  $V$  d'autres conditions comme suit

$$V = \{v \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \text{ régulière } v = 0 \text{ sur } \partial\Omega.\}$$

Donc (3.26) peut être écrite

$$\int_{\Omega} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v = \int_{\Omega} f v, \quad \forall v \in V. \quad (3.27)$$

On a construit un problème variationnel décrit comme suit :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v = \int_{\Omega} f v, & \text{pour tout } v \in V \\ \text{Trouver } u \in V \text{ solution.} \end{cases} \quad (3.28)$$

**Remarque 3.3.1** *En général, la dimension de  $V$  est infinie. Pour cela, on introduit un sous-espace  $V_h \subset V$ , tel que  $\dim V_h = k_h$  est finie. Donc, il existe une base  $(\xi_i)_i^{k_h}$  de fonctions pour  $V_h$ .*

On passe alors du problème (3.28) au problème (3.29)

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ solution,} \\ \int_{\Omega} \vec{\nabla} u_h \cdot \vec{\nabla} v_h = \int_{\Omega} f v_h, \end{cases} \quad v_h \in V_h. \quad (3.29)$$

(3.29) est appelé un problème variationnel approché.

Tant que  $v_h$  est un élément de  $V_h$ , donc, il peut être écrit en fonction des éléments de la base, disant  $v_h = \xi_i$ ,  $i = 1, \dots, k_h$ , et de même pour  $u_h = \sum_{j=1}^{k_h} u_k^j \xi_j$ , où  $u_k^j$  sont des constantes.

L'équation du problème (3.29) devient, pour tout  $i = 1, \dots, k_h$ ,

$$\int_{\Omega} \vec{\nabla} \left( \sum_{j=1}^{k_h} u_k^j \xi_j \right) \cdot \vec{\nabla} \xi_i = \int_{\Omega} f \xi_i,$$

ce qui donne, pour  $i = 1, \dots, k_h$ ,

$$\sum_{j=1}^{k_h} \left( \int_{\Omega} \vec{\nabla} \xi_j \cdot \vec{\nabla} \xi_i \right) u_k^j = \int_{\Omega} f \xi_i.$$

Si on pose

$$A_{i,j} = \int_{\Omega} \vec{\nabla} \xi_j \cdot \vec{\nabla} \xi_i, \quad b_i = \int_{\Omega} f \xi_i.$$

D'où

$$\sum_{j=1}^{k_h} A_{i,j} u_k^j = b_i, \quad i = 1, \dots, k_h.$$

Si on introduit

$${}^t U_k = [u_h^1, \dots, u_h^{k_h}].$$

Donc le système peut être traduit comme  $AU = B$ .

### Dèscription de la méthode MEF pour un problème mixte

On s'intéresse à résoudre

$$\begin{cases} -\Delta u = \alpha, & \text{dans } \Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \\ u = f, & \text{sur } \Gamma_1. \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g, & \text{sur } \Gamma_2. \end{cases} \quad (3.30)$$

où les données  $\alpha$ ,  $f$ ,  $g$  sont des fonctions régulières.

Si on introduit la fonction  $u_0$  définie sur  $\mathbb{C}(\Omega)$ , tel que  $u_0 = f$  sur  $\Gamma_1$ , et on pose  $v = u - u_0$ .

Alors

$$v|_{\Gamma_1} = u|_{\Gamma_1} - u_0|_{\Gamma_1} = f - f = 0;$$

De plus

$$\frac{\partial v}{\partial n}|_{\Gamma_2} = \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_2} - \frac{\partial u_0}{\partial n}|_{\Gamma_2} = g - \frac{\partial u_0}{\partial n}|_{\Gamma_2} = g_1.$$

Donc  $v$  est une solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta v = \alpha_1, & \text{dans } \Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \\ v = 0 & \text{sur } \Gamma_1. \\ \frac{\partial v}{\partial n} = g_1 & \text{sur } \Gamma_2, \end{cases} \quad (3.31)$$

avec  $\alpha_1 = \alpha + u_0$ .

On considère le problème (juste on change  $v$  par  $u$ )

$$\begin{cases} -\Delta u = \alpha_1, & \text{dans } \Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_1. \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g_1 & \text{sur } \Gamma_2, \end{cases} \quad (3.32)$$

Si  $\alpha_1 \in \mathcal{C}(\Omega)$ , alors on choisit  $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ .

Soit  $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ; on multiplie par  $v$ , et on intègre sur  $\Omega$ , on trouve

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \Delta u v &= \int_{\Omega} \alpha_1 v, \\ \int_{\Omega} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v &= \int_{\Omega} \alpha_1 v, \\ \int_{\Omega} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v - \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial n} v - \int_{\Gamma_2} \frac{\partial u}{\partial n} v &= \int_{\Omega} \alpha_1 v, \\ \int_{\Omega} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v - \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial n} v - \int_{\Gamma_2} g v &= \int_{\Omega} \alpha_1 v. \end{aligned}$$

On introduit l'espace  $V = \{v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad v \in \mathcal{C}^1(\Omega), \quad v|_{\Gamma_1} = 0\}$ .

Alors, le problème devient

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V \\ \int_{\Omega} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v = \int_{\Gamma_2} g v + \int_{\Omega} \alpha_1 v \quad \text{pour tout } v \in V. \end{cases} \quad (3.33)$$

Dans cette étape, on est besoin de construire un espace de dimension finie  $\tilde{V} \subset V$ , avec  $\dim \tilde{V} = k_h < \infty$ .

$$\tilde{V} = \{\tilde{v}; \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tilde{v}|_{\Gamma_1} = 0.\}$$

Dans la suite, avec un exemple en 1D, on va construire une base pour l'espace  $\tilde{V}$ , qui va nous aider à trouver la solution approchée d'un problème elliptique.

**Exemple en 1D**

Prenant le cas de l'équation différentielle

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), & x \in (0, 1) \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \quad (3.34)$$

Soit une fonction  $v \in \mathcal{C}^1([0, 1])$ , nulle en 0 et 1. On multiplie l'équation par  $v$  et on intègre de 0 à 1. Alors, on a

$$-\int_0^1 u''(x)v(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx,$$

et donc,

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx, \quad \forall v \in V,$$

avec  $V = \{v \in \mathcal{C}([0, 1]); v(0) = v(1) = 0, v' \text{ est continue par morceaux}\}$ .

On cherche alors à écrire un problème approché dans un sous espace de dimension finie. Soit  $\tilde{V}$  un sous espace de  $V$  de dimension  $N$  finie. Soit  $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N\}$  une base de l'espace  $\tilde{V}$ . Ainsi toute fonction  $\tilde{u}$  de  $\tilde{V}$  peut s'écrire comme suit

$$\tilde{u}(x) = \sum_{j=1}^N u_j \phi_j(x).$$

Résoudre le problème différentiel de départ revient alors à chercher une solution  $\tilde{u} \in \tilde{V}$  telle que

$$\int_0^1 \tilde{u}'(x)\tilde{v}'(x)dx = \int_0^1 f(x)\tilde{v}(x)dx, \quad \forall \tilde{v} \in \tilde{V},$$

c'est à dire chercher  $N$  réels  $u_1, u_2, \dots, u_N$ , vérifiant

$$\sum_{j=1}^N u_j \int_0^1 \phi_j'(x)\tilde{v}'(x)dx = \int_0^1 f(x)\tilde{v}(x)dx, \quad \forall \tilde{v} \in \tilde{V},$$

ou encore (en prenant  $\tilde{v} = \phi_i$ )

$$\sum_{j=1}^N u_j \int_0^1 \phi'_j(x) \phi'_i(x) dx = \int_0^1 f(x) \phi_i(x) dx, \quad \forall \phi_i \in \tilde{V}. \quad (3.35)$$

On remarque que la formule (3.35) peut être écrite sous forme matricielle  $AU = B$ , avec  $A = (a_{ij})N$ , où  $a_{ij} = \int_0^1 \phi'_j(x) \phi'_i(x) dx$ ,  $B = (b_i)1 \times N$ ,  $b_i = \int_0^1 f(x) \phi_i(x) dx$ , et le vecteur des inconnues  $u = (u_1, \dots, u_N)$ .

Il reste à choisir les  $N$  fonctions  $\phi_i$  de manière que le système soit simple à résoudre numériquement.

### Choix des fonctions $\phi_i$

L'intervalle  $(0, 1)$  est discrétisé en  $N$  points de coordonnées  $x_i$ . Les fonctions  $\phi_i(x)$  sont choisies comme des fonctions polynomiales de degré 1 définies par

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} & \text{si } x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}} & \text{si } x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.36)$$

Ces éléments sont appelés les éléments finis d'ordre un. Il est aussi possible de choisir pour éléments finis des fonctions de degré deux ou plus.

Le calcul de la matrice  $A$  fait intervenir les dérivées  $\phi'_i(x)$  simples à calculer :

$$\phi'_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{x_i-x_{i-1}} & \text{si } x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \frac{1}{x_i-x_{i+1}} & \text{si } x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.37)$$

Donc, les éléments de la diagonale de la matrice  $A$  sont écrits sous la forme

$$a_{i,i} = \int_0^1 \phi'_i(x) \phi'_i(x) dx = \frac{1}{x_i - x_{i-1}} + \frac{1}{x_{i-1} - x_i},$$

$$a_{i,i+1} = \int_0^1 \phi'_{i+1}(x) \phi'_i(x) dx = \frac{-1}{x_{i+1} - x_i},$$

$$a_{i-1,i} = \int_0^1 \phi'_i(x)\phi'_{i-1}(x)dx = \frac{-1}{x_i - x_{i-1}}.$$

Pour calculer les composantes du vecteur  $B$ , on choisit la méthode des trapèzes, et on trouve

$$b_i = \int_0^1 f(x)\phi_i(x)dx = f_i\left(\frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2}\right).$$

Dans le cas où les  $N$  points de l'intervalle  $(0, 1)$  sont régulièrement espacés avec un pas  $h$ . La discrétisation en éléments finis devient

$$\frac{2u_i - u_{i-1} - u_{i+1}}{h^2} = f_i, \quad i \in 1, \dots, N,$$

et donc la forme matricielle s'écrit comme suit

$$\frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-1} \\ f_N \end{pmatrix}.$$



# Chapitre 4

## Équations elliptiques

On a vu dans les premiers chapitres la forme générale des équations elliptiques de différents ordres. On s'intéresse dans cette section à la conduction 1D en régime stationnaire où on va étudier la méthode TDMA pour résoudre une équation algébrique linéaire.

La conduction en régime stationnaire veut dire que la température ne dépend pas du temps, et que la température dépend uniquement des variables spatiales.

La conduction thermique est le transfert de la chaleur sans mouvements macroscopiques de la matière. Elle est dominante surtout dans les milieux solides.

### 4.1 Conduction 1D en régime stationnaire

#### Maillage

Un maillage est une partition de l'espace ou d'un domaine en cellules élémentaires.

**Définition 4.1.1** Soit  $\Omega$  un domaine borné de  $\mathbb{R}^n$ ,  $T_h$  est un maillage de  $\Omega$ , si

- 1  $\Omega = \bigcup_{k \in T_h} k$ .
- 2 L'intérieur de tout élément  $k$  de  $T_h$  est non vide.
- 3 L'intersection de l'intérieur de deux éléments est vide.

Un maillage est dit "**conforme**" si l'intersection de deux éléments distincts  $k$  et  $k'$  est soit :

- a- l'ensemble vide.

b- Un simplexe commun à  $k$  et  $k'$  (noeud, arête, ou triangle en 3D).

Pour être utilisable pour la simulation numérique, les maillages doivent :

- \* Représenter suffisamment bien la géométrie.
- \* Comporter suffisamment d'éléments pour calculer précisément.

#### 4.1.1 Méthode de TDMA

On présente dans cette partie l'algorithme de matrice tridiagonale (Tri-Diagonal Matrix Algorithm TDMA), également connu sous le nom d'algorithme de Thomas, est une forme simplifiée qui peut être utilisée pour résoudre des systèmes tridiagonaux d'équations. Un système tridiagonal pour  $n$  inconnues peut s'écrire comme suit

$$a_i u_{i-1} + b_i u_i + c_i u_{i+1} = d_i, \quad (4.1)$$

où

$$a_1 = 0, \quad c_N = 0;$$

ou sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} b_1 & c_2 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & b_2 & c_3 & \cdots & 0 \\ 0 & a_3 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & c_N \\ 0 & 0 & \cdots & a_N & b_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{N-1} \\ d_N \end{pmatrix}.$$

On remarque dans l'équation (4.1) que la  $i^{\text{eme}}$  inconnue peut être réécrite en fonction de la  $i^{\text{eme}+1}$  inconnue, i.e ;

$$u_i = P_i u_{i+1} + Q_i, \quad (4.2)$$

$$u_{i-1} = P_{i-1} u_i + Q_{i-1}, \quad (4.3)$$

où  $P_i$  et  $Q_i$  sont des constantes. On note que si toutes les équations du système sont exprimées de cette manière, alors la matrice devient une matrice triangulaire supérieure. Pour déterminer les coefficients  $P_i$  et  $Q_i$ , on substitue l'équation (4.3) en (4.1), et on trouve :

$$a_i(P_{i-1} u_i + Q_{i-1}) + b_i u_i + c_i u_i = d_i,$$

$$(a_i P_{i-1} + b_i)u_i + c_i u_{i+1} = d_i - a_i Q_{i-1},$$

ce qui donne

$$u_i = \frac{-c_i}{a_i P_{i-1} + b_i} u_{i+1} + \frac{d_i - a_i Q_{i-1}}{c_i P_{i-1} + b_i}. \quad (4.4)$$

On compare les équations (4.2) et (4.4), on obtient

$$P_i = \frac{-c_i}{b_i + a_i P_{i-1}}, \quad Q_i = \frac{d_i - a_i Q_{i-1}}{b_i + a_i P_{i-1}}. \quad (4.5)$$

Pour calculer  $P_1$  et  $Q_1$ , on utilise le fait que  $a_1 = 0$ , et on trouve que  $P_1 = \frac{-c_1}{b_1}$ , et  $Q_1 = \frac{d_1}{b_1}$ , (on remarque que les termes  $P_0$  et  $Q_0$  disparaissent).

Dans la suite, il suffit d'utiliser la relation de récurrence pour trouver toutes les termes  $P_i$  et  $Q_i$ .

Maintenant, pour commencer la substitution inverse, on utilise  $c_N = 0$ , ce qui donne  $P_N = 0$ , et  $u_N = Q_N$ . Enfin, on utilise l'équation (4.2) pour trouver  $u_{N-1}, \dots, u_1$ .

**Exemples 4.1.1** *En utilisant l'algorithme de Thomas (la méthode de TDMA), résoudre le problème suivant*

1-

$$\begin{pmatrix} 20 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 15 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 15 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 15 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1100 \\ 100 \\ 100 \\ 100 \\ 1100 \end{pmatrix}.$$

2- Résoudre par l'algorithme de Thomas le système  $AU = f$ , où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

et

$$f = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -14 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

## 4.2 Conduction 2D et 3D

### 4.2.1 Résolution des équations algébriques par la méthode de Gauss Seidel

On va étudier une méthode de résolution des systèmes linéaires : la méthode de Gauss-Seidel. L'objectif est de construire une suite vectorielle convergente vers la solution exacte du système linéaire.

#### Principe de construction

La méthode de Gauss-Sidel est une méthode de résolution itérative du système linéaire de la forme :

$$Ax = b, \tag{4.6}$$

tel que

*A est une matrice dans  $\mathbb{M}(n)$ ,*

*x est le vecteur des inconnues,*

*b est un vecteur du second membre.*

Pour cela, on utilise une suite  $x^{(k)}$  qui converge vers un point fixe  $x$  solution du système d'équations linéaires.

On cherche à construire l'algorithme  $x^{(0)}$  donnée, et la suite  $x^{(k+1)} = F(x^{(k)})$  avec  $k \in \mathbb{N}$ . On décompose  $A$  de la forme  $A = M - N$ , telle que  $M$  est une matrice inversible. Le système 4.6 devient

$$(M - N)x = b, \tag{4.7}$$

c'est à dire

$$Mx = Nx - b. \tag{4.8}$$

Puisque  $M$  est inversible, on multiplie les deux membres du système par  $M^{-1}$ , et on trouve :

$$x = M^{-1}Nx + M^{-1}b. \quad (4.9)$$

On obtient, donc, l'algorithme suivant :

$$\begin{cases} x^{(0)} \text{ donne,} \\ x^{(k+1)} = M^{-1}Nx^{(k)} + M^{-1}b. \end{cases} \quad (4.10)$$

La matrice  $A$  peut être décomposée de la manière suivante :

$$A = D + E + F,$$

où

$E$  est une matrice triangulaire inférieure,

$D$  est une matrice diagonale,

$F$  est une matrice triangulaire supérieure.

Pour  $n = 3$ ;  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ . Alors

$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix}$ ,  $D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$ ,  $F = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Dans la méthode

de gauss-Seidel, on prend :

$$M = D + E, \quad N = -F.$$

Alors l'algorithme (4.10) devient

$$\begin{cases} x^{(0)} \text{ donne,} \\ x^{(k+1)} = (D + E)^{-1}Fx^{(k)} + (D + E)^{-1}b. \end{cases} \quad (4.11)$$

**Remarque 4.2.1** Pour appliquer la méthode de Gauss-Seidel, il faut que l'une des trois conditions de convergence soit vérifiée :

- 1-  $|a_{ii}| \geq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|$ , pour tout  $i = 1, \dots, n$ .
- 2-  $\sum_{k=1}^n |a_{ij}| < 1$ ,
- 3-  $\rho(M^{-1}N) < 1$ , où ( $\rho$  : est le rayon spectral).

**Application (n=3)**

On a

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3),$$

$$x_2 = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3),$$

$$x_3 = \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2),$$

alors, les itérations de l'algorithme (4.11) deviennent comme suit

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)}),$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)}),$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1^{(k+1)} - a_{32}x_2^{(k+1)}).$$

**Exemples 4.2.1** Résoudre à l'aide de la méthode de Gauss-Seidel le système suivant

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - x_3 = 3, \\ 2x_1 + 7x_2 + x_3 = 19, \\ x_1 - 3x_2 + 12x_3 = 31. \end{cases} \quad (4.12)$$

## 4.2.2 Résolution des équations algébriques par la méthode de relaxation

La méthode de relaxation est une méthode itérative qui permet de résoudre un système de la forme  $Ax = b$ , avec  $A$  est une matrice inversible d'ordre  $n$ ;  $b$  est un vecteur du second membre qui appartient à  $\mathbb{R}^n$ .

Dans cette méthode, on va construire une suite  $x^{(n)}$  qui converge vers une solution exacte  $x^*$ .

On va décomposer la matrice  $A$  comme suit :

$$A = D + U + L;$$

avec  $D$  est une matrice diagonale,

$U$  est une matrice traingulaire supérieure,

$L$  est une matrice traingulaire inférieure.

La matrice de relaxation se caractrèrise par le paramètre  $\omega$ , ce paramètre n'est que le poids; c'est à dire  $\omega > 0$ .

Si  $\omega = 1$ , on trouve la méthode de Gauss-Seidel. Alors, la méthode de relaxation n'est que la généralisation de la méthode de Gauss-Seidel.

En partant d'un système

$$Ax = b;$$

on multiple par  $\omega$ , pour trouver

$$\omega Ax = \omega b;$$

on remplace  $A$  par sa décomposition

$$\omega(D + U + L)x = \omega b$$

ce qui donne

$$\omega Lx = \omega b - \omega Dx - \omega Ux;$$

maintenant, on multiple par  $Dx$  les deux membres de la dernière équation, pour obtenir

$$(\omega L + D)x = \omega b - (\omega Dx + \omega Ux) + Dx;$$

ce qui donne

$$(\omega L + D)x = \omega b - ([\omega U + (\omega - 1)D]x).$$

Tant que  $(D + \omega L)$  est inversible, alors

$$x = (\omega L + D)^{-1}(\omega b - ([\omega U + (\omega - 1)D]x)).$$

Donc, le schéma itératif est donné comme suit

$$\begin{cases} x^{(0)} & \text{donnee,} \\ x^{(k+1)} = (\omega L + D)^{-1}(\omega b - ([\omega U + (\omega - 1)D]x^{(k)})). \end{cases} \quad (4.13)$$

La matrice  $(D + \omega L)$  étant triangulaire, il est aisé de calculer son inverse, d'où

$$x_i^{(k+1)} = (1 - \omega)x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}}(b_i - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)}), \quad i = 1, \dots, n.$$

**Théorème 4.2.1** (*De convergence*) : On suppose que  $A$  est symétrique, définie positive. Alors, la méthode de relaxation converge pour tout  $\omega \in ]0, 2[$

**Rappel :**

- Une matrice  $A$  est dite symétrique si  $A^t = A$ .
- Une matrice  $A$  est dite définie positive si tous ses valeurs propres sont strictement positives.

**Exemples 4.2.2** En partant de  $x^{(0)} = (0, 0, 0)^t$ , déterminer les six premiers itérés de la méthode de relaxation.

$$(S) : \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = -1, \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 = 7, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = -7. \end{cases} \quad (4.14)$$



# Bibliographie

H.F. Weinberger (1965). A First Course in Partial Differential Equations, **Dover Publications, Inc.**

Mark S. Gockenbac (2002). Partial Differential Equations Analytical and Numerical Methods, **Siam.**

M. Kadja (2000/2001). *á* Résolution numérique des équations aux dérivées partielles : Méthodes des différences finies *z*, Cours et exercices résolus. **Les éditions de l'université.**

I. Popa (2002). Modélisation Numérique du Transfert Thermique. Méthode des Volumes Finis. **Edition : Publisher : Universitaria ISBN.**

Y. Harnane (2015). Méthodes numériques I-Méthodes des différences finies. Peiró, J., & Sherwin, S. (2005). Finite Difference, Finite Element and Finite Volume Methods for Partial Differential Equations. **Handbook of Materials Modeling.**