

Chapitre 2

Méthodes de discrétisation

Pour résoudre un problème des équations aux dérivées partielles les données suivantes sont nécessaires

- Définir un domaine Ω .
- Une équation aux dérivées partielles.
- Des conditions aux limites (et des conditions initiales si le problème est d'évolution).

Pour obtenir une approximation numérique de la solution de ce problème, nous devons approcher les dérivées partielles de l'EDP en chaque noeud du domaine discrétisé (maillage) en utilisant les valeurs de la variable dépendante en ce noeud et aux noeuds avoisinants.

2.1 Méthode des différences finies

Cette méthode est fournie au problème aux limites afin d'obtenir une solution approchée, sur un maillage, en se basant sur la discrétisation de l'opérateur différentiel $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \dots$

Le principe de cette méthode est la discrétisation du domaine de calcul un nombre fini de points sur lesquels on approche les opérateurs de dérivation des équations modèles par des développements en séries de Taylor tronquées à l'ordre de précision choisie.

2.1.1 Méthode de différences finies pour les équations elliptiques

Résolution du problème de Dirichlet homogène

On choisit comme un modèle, le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} -y'' = f(x), & \text{si } x \in]0,1[\\ y(0) = y(1) = 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

où f est une fonction continue sur $[0, 1]$.

On commence par choisir un entier $N \geq 1$ et on divise l'intervalle $[0; 1]$ en $(N + 1)$ sous-intervalles dont les extrémités sont les points du maillage.

$$x_i = ih, \quad i = 1, \dots, N + 1, \quad h = \frac{1}{N + 1}. \quad (2.2)$$

Le pas h est choisi constant pour faciliter l'utilisation des algorithmes servant à résoudre les systèmes linéaires qui résultent de l'approximation et qui font intervenir une matrice de dimension $N \times N$.

On utilise maintenant le développement de Taylor au point x_i pour remplacer y'' . Evidemment, si y est de classe $\mathcal{C}^4([0, 1])$, alors :

$$y''(x_i) = \frac{1}{h^2}(y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1}))) - \frac{h^2}{12}y^{(4)}(\xi_i), \quad \xi_i \in [x_{i-1}, x_{i+1}]. \quad (2.3)$$

On néglige le terme contenant ξ_i dans la formule précédente et on note y_i une approximation de y au point x_i .

On revient au problème (2.1), on obtient finalement la méthode des différences finies suivante

$$\begin{aligned} y_0 = 0, \quad y_{N+1} = 0, \\ -y_{i-1} + 2y_i - y_{i+1} = h^2 f(x_i), \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (2.4)$$

l'erreur de troncature dans ce cas est d'ordre $\mathcal{O}(h^2)$.

Le schéma numérique (2.4) s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$MY_h = b_h, \quad (2.5)$$

où la matrice M est donnée par

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

tandis que Y_h et b_h sont des vecteurs dans \mathbb{R}^n , on a :

$$Y_h = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{N-1} \\ y_N \end{pmatrix} \text{ et } b_h = h^2 \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{N-1}) \\ f(x_N) \end{pmatrix}.$$

Exemples 2.1.1 Résoudre le problème de Dirichlet suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = x, \\ T(0) = 0, \quad T(1) = 0. \end{cases}$$

Le développement de Taylor de T est

$$\frac{T_{i-1} - 2T_i + T_{i+1}}{\Delta x^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2},$$

dans ce cas Δx désigne h .

Posant $T_0 = 0$ et $T_5 = 0$ ($N = 4$).

Résolution du problème de Dirichlet non homogène

On considère le problème linéaire du second ordre suivant

$$\begin{cases} y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), \quad x \in]0, 1[, \\ y(0) = \alpha, \quad y(1) = \beta. \end{cases}$$

p, q, r , sont des fonctions continues sur $[0, 1]$, α et β sont deux nombres réels.

Pour trouver la solution approchée du problème (2.1.1) par la méthode des différences finies, on commence par diviser l'intervalle $[0, 1]$ en $N + 1$ sous-intervalles comme suit

$$x_i = ih, \quad i = 1, \dots, N + 1, \quad h = \frac{1}{N+1}.$$

Supposant $y \in \mathcal{C}^4([0, 1])$, en utilisant le développement de Taylor de y au point x_i , on trouve

$$y''(x_i) = \frac{1}{h^2}(y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1}))) - \frac{h^2}{24}y^{(4)}(\xi_i), \quad \xi_i \in [x_{i-1}, x_{i+1}], \quad (2.6)$$

et

$$y'(x_i) = \frac{1}{2h}(y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}))) - \frac{h^2}{6}y^{(3)}(\kappa_i), \quad \kappa_i \in [x_{i-1}, x_{i+1}]. \quad (2.7)$$

On néglige dans les relations (2.6) et (2.7) les termes contenant les dérivées de y aux points inconnus ξ_i et κ_i et tenant compte les conditions aux limites, on obtient la méthode aux différences finies suivante avec une erreur de troncature d'ordre $\mathcal{O}(h^2)$

$$\begin{cases} y_0 = \alpha, & y_{N+1} = \beta, \\ \frac{1}{h^2}(-y_{i+1} + 2y_i - y_{i-1}) + p(x_i)\frac{1}{2h}(y_{i+1} - y_{i-1}) + q(x_i)y_i = -r(x_i), & i = 1, \dots, N. \end{cases}$$

L'équation précédente peut être réécrite comme suit

$$-(1 + \frac{h}{2}p(x_i))y_{i-1} + (2 + h^2q(x_i))y_i - (1 - \frac{h}{2}p(x_i))y_{i+1} = -h^2r(x_i), \quad i = 1, \dots, N,$$

ou d'une manière plus simple

$$-(1 + \frac{h}{2}p_i)y_{i-1} + (2 + h^2q_i)y_i - (1 - \frac{h}{2}p_i)y_{i+1} = -h^2r_i, \quad i = 1, \dots, N.$$

Cette dernière peut être écrite sous forme un système linéaire $MY_h = b_h$, $M \in \mathcal{M}(N)$, avec

$$M = \begin{pmatrix} 2 + h^2q_1 & -1 + \frac{h}{2}p_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 + \frac{h}{2}p_2 & 2 + h^2q_2 & -1 + \frac{h}{2}p_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 + \frac{h}{2}p_3 & 2 + h^2q_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 + h^2q_{N-1} & -1 + \frac{h}{2}p_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 + \frac{h}{2}p_{N-1} & 2 + h^2q_N \end{pmatrix},$$

$$Y_h = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{N-1} \\ y_N \end{pmatrix} \text{ et } b_h = h^2 \begin{pmatrix} -h^2r_1 + (1 + \frac{h}{2} + p_1)\alpha \\ -h^2r_2 \\ \vdots \\ -h^2r_{N-1} \\ -h^2r_N + (1 + \frac{h}{2} + p_N)\beta \end{pmatrix}.$$

Exemples 2.1.2 Résoudre le problème de Dirichlet non homogène suivant

$$\begin{cases} \frac{d^2 y}{dx^2} = x, \\ y(0) = 1, \quad y(1) = 2. \end{cases}$$

Résolution du problème de Dirichlet en 2 dimensions

Le principe dans le cas des problèmes de dimensions supérieure à 1 est le même que celui utilisé dans le cas d'une seule dimension, et les étapes sont complètement analogues.

On cherche à résoudre numériquement le problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \Omega =]0, 1[\times]0, 1[\\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où $u = u(x, y)$, et $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ désigne le laplacien.

Le maillage de Ω est présenté par

$$x_i = ih \quad y_j = jh \quad i, j = 0, \dots, N + 1,$$

où

$$h = \frac{1}{N + 1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Maintenant, en utilisant toujours le développement de Taylor (pour les fonctions à plusieurs variables), on trouve

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) = \frac{u(x_{i-1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i+1}, y_j)}{h^2}, \quad (2.8)$$

et

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j) = \frac{u(x_i, y_{j-1}) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j+1}))}{h^2}. \quad (2.9)$$

De (2.8) et (2.9), le schéma numérique de u peut être considéré comme :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) = \frac{-4u(x_i, y_j) + u(x_{i-1}, y_j) + u(x_{i+1}, y_j) + u(x_i, y_{j-1}) + u(x_i, y_{j+1}))}{h^2}, \quad (2.10)$$

ou simplement

$$\Delta_h u_{i,j} = \frac{-4u_{i,j} + u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1}}{h^2}. \quad (2.11)$$

Avec la notation (2.20), on peut définir le problème discrétisé

$$\begin{cases} -\Delta_h u_{i,j} = f_{i,j}, & i, j = 1, \dots, N, \\ u_{0,j} = u_{N+1,j} = u_{i,0} = u_{i,N+1} = 0. \end{cases}$$

Remarque 2.1.1 On peut choisir deux pas différents pour x et y , disant h et k , alors $h = \frac{1}{N+1}$, $k = \frac{1}{M+1}$.

2.1.2 Méthode de différences finies pour les équations hyperboliques

Il y a deux types essentiels dans ce cas : explicite et implicite.

Soit l'équation des ondes :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ u(x, 0) = f(x), \quad \forall x \in [0, a], \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x). \end{cases}$$

Méthode explicite

Toujours, on utilise les mêmes étapes de discrétisation, on trouve

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} = \frac{1}{c^2} \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2}.$$

Le problème des ondes discrétisé est donné par

$$\begin{cases} u_{i,j+1} = -u_{i,j-1} + 2(1 - \lambda)u_{i,j} + \lambda(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}), & \lambda = c^2 \frac{k^2}{h^2} \\ \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2k} = g_i. \end{cases}$$

Pour $j = 0$ on a

$$u_{i,1} = -u_{i,-1} + 2(1 - \lambda)u_{i,0} + \lambda(u_{i+1,0} + u_{i-1,0}),$$

puisque

$$u_{i,1} - u_{i,-1} = g_i,$$

alors

$$u_{i,-1} + 2kg_i = -u_{i,-1} + 2(1 - \lambda)u_{i,0} + \lambda(u_{i+1,0} + u_{i-1,0}),$$

d'où

$$u_{i,-1} = -kg_i + (1 - \lambda)u_{i,0} + \frac{\lambda}{2}(u_{i+1,0} + u_{i-1,0}),$$

ce qui donne

$$u_{i,1} = kg_i + (1 - \lambda)u_{i,0} + \frac{\lambda}{2}(u_{i+1,0} + u_{i-1,0}).$$

Pour trouver la solution complète de ce problème il faut imposer les conditions aux limites pour x ($x = 0$, et $x = a$).

Remarque 2.1.2 *Pour que la solution soit stable il faut que $k < \frac{h}{c}$. Pour cette raison, on doit employer la méthode implicite, si on désire calculer u en des pas grandes.*

Méthode implicite

En prend en considération que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u(x_{i,j+1})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x_{i,j-1})}{\partial x^2} \right),$$

pour trouver

$$\frac{\lambda}{2}u_{i+1,j+1} + (1 + \lambda)u_{i,j+1} - \frac{\lambda}{2}u_{i-1,j+1} = 2u_{i,j} + \frac{\lambda}{2}(u_{i+1,j-1} - 2u_{i,j-1} + u_{i-1,j-1}).$$

Il est évident que la méthode est stable pour n'importe quelle valeur de $k = jt$, ce qui donne l'avantage à cette méthode.

2.1.3 Méthode de différences finies pour les équations paraboliques

Pour la résolution de ce type des équations, il existe deux types de base : Méthode explicite de résolution, et la méthode implicite de résolution.

La forme générale des équations paraboliques est :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x) \frac{\partial u}{\partial x} + c(x)u(x) + d(x), \quad x \in [a, b], \quad (2.12)$$

avec des conditions aux limites de Dirichlet

$$u(a, t) = u_a(t) \quad u(b, t) = u_b(t),$$

et des conditions initiales

$$u(x, 0) = u_0(x).$$

Le maillage de l'intervalle $[a, b]$ est toujours $x_i = ih$, avec $h = \frac{a}{N+1}$.

Méthode explicite

Après utiliser le développement de Taylor sur la fonction $u(x, t)$, on obtient

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} = a_i \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + b_i \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} + c_i u_{i,j} + d_i, \quad i = 1, \dots, N,$$

ce qui donne

$$u_{i,j+1} = \left(\frac{a_i k}{h^2} + \frac{b_i k}{2h}\right) u_{i-1,j} + \left(1 + \frac{2a_i k}{h^2} + c_i k\right) u_{i,j} + \left(\frac{a_i k}{h^2} + \frac{b_i k}{2h}\right) u_{i+1,j} + d_i k.$$

La méthode s'applique sans aucune modification de principe aux équations dont les coefficients a, b, c, d dépendent non seulement de x mais aussi de t et u ainsi qu'aux fonctions de plusieurs variables d'espace.

La méthode explicite nécessite une condition de choisir $k \rightarrow 0$ suffisamment petit pour que la solution soit stable. C'est pour cela, il est préférable d'utiliser la méthode implicite.

Méthode implicite

Le principe de cette méthode est d'écrire le second terme de l'équation (2.12) à l'instant t_{j+1} où la solution est inconnue. On utilise les différences à gauche pour trouver

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} = a_i \frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}}{h^2} + b_i \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1}}{2h} + c_i u_{i,j+1} + d_i, \quad i = 1, \dots, N,$$

On obtient finalement

$$\left(\frac{a_i}{h^2} + \frac{b_i}{2h}\right)u_{i-1,j+1} - \left(\frac{1}{k} + \frac{2a_i}{h^2} - c_i\right)u_{i,j+1} + \left(\frac{a_i}{h^2} + \frac{b_i}{2h}\right)u_{i+1,j+1} = -\left(\frac{u_{i,j}}{k} + d_i\right).$$

On a $(n+2)$ inconnus mais on a n équations, on remplace donc les conditions aux limites $u_{0,1}$, $u_{N+1,1}$ par leur valeurs, on aura alors un système de n équations à n inconnus.

2.2 Méthode des volumes finis

Contrairement à la méthode des différences finies qui met en jeu des approximations des dérivées, les méthodes des volumes finis et des éléments finis exploitent des approximations d'intégrales.

L'équation aux dérivées partielles est résolue de manière approchée à l'aide d'un maillage constitué de volumes finis qui sont des petits volumes disjoints en 3D (des surfaces en 2D, des segments en 1D) dont la réunion constitue le domaine d'étude.

Un avantage de la méthode des Volumes Finis par rapport à la méthode des Différences Finies est qu'elle permet de résoudre des EDP avec des géométries complexes dans la mesure où elle utilise des maillages non-structurés.

2.2.1 Méthode de volumes finis pour les équations elliptiques monodimensionnelles

Considérant le problème elliptique en 1D défini sur l'intervalle $[0, 1]$.

$$\begin{cases} -u'' = f(x), & \text{si } x \in]0, 1[\\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \quad (2.13)$$

où f est une fonction continue sur $[0, 1]$.

— On discrétise l'intervalle $[0, 1]$ en introduisant un maillage défini comme suit :

$$k_i =]x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}[, \quad i = 1, \dots, N,$$

où $x_{i+\frac{1}{2}} \in [0, 1]$ tels que $0 < x_0 = x_{\frac{1}{2}} < x_{\frac{3}{2}} < \dots < x_{i-\frac{N}{2}} < x_{N+\frac{1}{2}} = x_{N+1} = 1$,

k_i est appelé volume de contrôle ou cellule.

x_i est le point centre associé à la cellule k_i .

Le pas de discrétisation h_i est défini par

$$h_i = |k_i| = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}},$$

$$h_{i+\frac{1}{2}} = x_{i+1} - x_i.$$

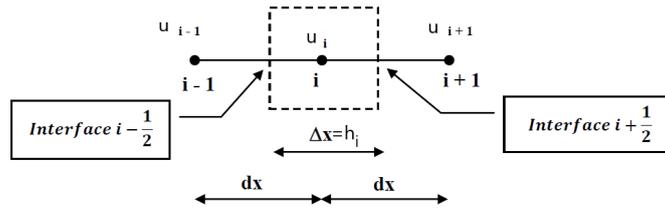


FIGURE 2.1 – Le volume de contrôle.

On pose, dans chaque cellule k_i , la solution approchée de la solution du problème (2.13) :

$$u_i \simeq \frac{1}{|k_i|} \int_{k_i} u(x) dx = \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} u(x) dx, \quad 1 \leq n \leq N.$$

— On intègre l'équation différentielle de (2.13) sur chaque cellule k_i

$$- \int_{k_i} u''(x) dx = \int_{k_i} f(x) dx$$

$$-u'(x_{i+\frac{1}{2}}) + u'(x_{i-\frac{1}{2}}) = h_i f_i$$

où f_i désigne la discrétisation f dans k_i , i.e., $f_i = \frac{1}{h_i} \int_{k_i} f(x) dx$. La quantité $-u'(x_{i+\frac{1}{2}})$ (respectivement $-u'(x_{i-\frac{1}{2}})$) représente le flux rentrant (respectivement flux sortant) associé à la cellule k_i au point $x = x_{i+\frac{1}{2}}$ (respectivement $x = x_{i-\frac{1}{2}}$).

On approche maintenant le flux $-u'(x_{i+\frac{1}{2}})$ par différences centrées :

$$-u'(x_{i+\frac{1}{2}}) \simeq -\frac{u(x_{i+\frac{1}{2}}) - u(x_i)}{x_{i+\frac{1}{2}} - x_i},$$

ou

$$-u'(x_{i+\frac{1}{2}}) \simeq -\frac{u(x_{i+\frac{1}{2}}) - u(x_{i+1})}{x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i+1}}.$$

Ces deux dernières formules traduisent la consistance de flux. Du fait des décentremments, il s'agit d'approximations d'ordre $O(h)$, avec $h = \max(h_i)$.

Au point $x = x_i$, on introduit le flux numérique $F_{i+\frac{1}{2}}^-$ associé à la cellule k_i , et $F_{i+\frac{1}{2}}^+$ associé à la cellule k_{i+1} , c'est à dire

$$F_{i+\frac{1}{2}}^- = -\frac{u_{i+\frac{1}{2}} - u_i}{x_{i+\frac{1}{2}} - x_i} ; \quad F_{i+\frac{1}{2}}^+ = -\frac{u_{i+\frac{1}{2}} - u_{i+1}}{x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i+1}}.$$

On impose alors la conservation des flux numériques à travers $x = x_{i+\frac{1}{2}}$

$$F_{i+\frac{1}{2}}^- = F_{i+\frac{1}{2}}^+.$$

On obtient donc

$$F_{i+\frac{1}{2}}^- = F_{i+\frac{1}{2}}^+ = -\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{x_{i+1} - x_i} = -\frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+\frac{1}{2}}}.$$

Le schéma numérique correspondant à l'approximation peut être décrit comme suit

$$\begin{cases} -\frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+\frac{1}{2}}} + \frac{u_i - u_{i-1}}{h_{i-\frac{1}{2}}} = h_i f_i, & i=1, \dots, N \\ u_0 = u_{N+1} = 0, \end{cases} \quad (2.14)$$

Si le système est linéaire, alors le problème numérique (2.14) s'écrit sous forme matricielle $Au_h = b'$ où $A \in \mathcal{M}(N)$, avec

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \beta_1 & \alpha_2 & \beta_2 & \cdots & 0 \\ 0 & \beta_2 & \alpha_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \beta_{N-1} & \alpha_{N-1} \end{pmatrix},$$

où

$$\alpha_i = \frac{1}{h_{i-\frac{1}{2}}} + \frac{1}{h_{i+\frac{1}{2}}} > 0, \quad \beta_i = -\frac{1}{h_{i+\frac{1}{2}}},$$

$$u_h = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{pmatrix} \text{ et } b_h = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-1} \\ f_N \end{pmatrix}.$$

2.2.2 Méthode de volumes finis pour les équations elliptiques en 2D

On cherche à déterminer la solution de l'équation de diffusion par la méthode de volumes finis dans un domaine polygonal $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. On cherche une fonction $u = u(x)$ définie pour $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$, vérifiant

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}(\Gamma \frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\Gamma \frac{\partial u}{\partial y}) + S_u = 0, & \text{dans } \Omega \\ u(0) = g, & \text{sur le bord } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.15)$$

La partition du domaine Ω , sur lequel l'équation (2.18) est définie, est présenté dans la figure suivante (Figure 2.2.2)

Par rapport le cas monodimensionnel, on a rajouté deux noeuds supplémentaires notés (N) et (S).

L'intégration de l'équation (2.18) sur le volume finis autour de P s'écrit

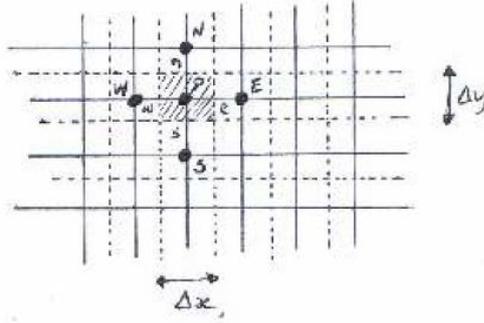


FIGURE 2.2 – Cellule d'un maillage de volumes finis en 2D.

$$\int_{\Delta V} \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx dy + \int_{\Delta V} \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy + \int_{\Delta V} S_u dV = 0. \quad (2.16)$$

On pose $A_e = A_w = \Delta y$, et $A_n = A_s = \Delta x$, on obtient

$$\left[\Gamma_e A_e \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_e - \Gamma_w A_w \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_w \right] + \left[\Gamma_n A_n \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_n - \Gamma_s A_s \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_s \right] + \bar{S} \Delta V = 0. \quad (2.17)$$

On utilise l'approximation introduite précédemment les différents termes de l'équation (2.17) s'écrivent :

$$\begin{aligned} \Gamma_e A_e \frac{\partial \Gamma u}{\partial x} \Big|_e &= \Gamma_e A_e \frac{(u_E - u_P)}{\delta x_{PE}} \\ \Gamma_w A_w \frac{\partial \Gamma u}{\partial x} \Big|_w &= \Gamma_w A_w \frac{(u_P - u_w)}{\delta x_{Pw}} \\ \Gamma_n A_n \frac{\partial \Gamma u}{\partial y} \Big|_n &= \Gamma_n A_n \frac{(u_N - u_P)}{\delta x_{PN}} \\ \Gamma_s A_s \frac{\partial \Gamma u}{\partial y} \Big|_s &= \Gamma_s A_s \frac{(u_P - u_s)}{\delta x_{Ps}}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Le terme source est linéarisé comme suit :

$$\bar{S} \Delta V = S_u + S_p u_p. \quad (2.19)$$

L'équation (2.17) s'écrit comme suit

$$\Gamma_e A_e \frac{u_E - u_P}{\delta x_{PE}} - \Gamma_w A_w \frac{u_P - u_w}{\delta x_{wP}} + \Gamma_n A_n \frac{u_N - u_P}{\delta x_{PN}} - \Gamma_s A_s \frac{u_P - u_s}{\delta x_{sP}} + \bar{S} \Delta V = 0. \quad (2.20)$$

L'équation (2.20) peut être réécrite comme suit :

$$\left[\frac{\Gamma_w A_w}{\delta x_{wP}} + \frac{\Gamma_e A_e}{\delta x_{PE}} + \frac{\Gamma_s A_s}{\delta x_{sP}} + \frac{\Gamma_n A_n}{\delta x_{PN}} - S_P \right] u_P = \left(\frac{\Gamma_w A_w}{\delta x_{wP}} \right) u_w + \left(\frac{\Gamma_e A_e}{\delta x_{PE}} \right) u_E + \left(\frac{\Gamma_s A_s}{\delta x_{sP}} \right) u_s + \frac{\Gamma_n A_n}{\delta x_{PN}} u_N + S_u, \quad (2.21)$$

ou de manière générale :

$$a_p u_p = a_w u_w + a_E u_E + a_s u_s + a_N u_N + S_u, \quad (2.22)$$

avec

$$\begin{aligned} a_w &= \frac{\Gamma_w A_w}{\delta x_{wP}}; & a_E &= \frac{\Gamma_e A_e}{\delta x_{PE}} \\ a_s &= \frac{\Gamma_s A_s}{\delta y_{sP}}; & a_N &= \frac{\Gamma_n A_n}{\delta y_{PN}}; \\ a_p &= a_w + a_E + a_s + a_n - S_p. \end{aligned} \quad (2.23)$$

L'équation (2.2.2) est écrite pour chaque noeud du domaine discretisé en tenant compte des conditions aux limites, un système d'équations algébriques en résulte, sa résolution permet de calculs u aux limites aux différents noeuds.

2.3 Méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis (MEF) permet de résoudre de manière discrète une EDP dont on cherche une solution approchée "suffisamment" fiable. De manière générale, cette EDP porte sur une fonction u , définie sur un domaine. Elle comporte des conditions aux bords permettant d'assurer l'existence et l'unicité d'une solution.

Une fois le choix de la géométrie approchée est terminée, l'espace d'approximation de la solution du problème, dans la MEF, est défini à l'aide du maillage du domaine. Le maillage du domaine d'en définir un pavage dans les pavés sont les éléments finis. Un élément fini est donc la donnée d'une cellule élémentaire et de fonctions de base de l'espace d'approximation.

Avantages de la méthode des éléments finis :

La MEF présente des avantages par rapport aux autres méthodes numériques :

Elle est applicable à tout type de problèmes dit de champs, de transfert thermiques,....

Elle n'impose aucune restriction géométrique, le corps ou le domaine à modéliser peut avoir une forme quelconque.

L'approximation peut être facilement améliorée en développant la taille du maillage en augmentant le nombre d'éléments.

2.3.1 Méthode de éléments finis pour les équations elliptiques

Dèscription de la méthode MEF pour un problème de Dirichlet

On est intéressé à chercher la solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{dans } \Omega \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.24)$$

où $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction "sufisamment" régulière (on prend $f \in C(\Omega)$).

On note que l'équation dans le problème (2.32) vaut $-\Delta u(x, y) = f(x, y) \quad \forall (x, y) \in \Omega$.

On suppose que $f \in C(\bar{\Omega})$ ($C(\bar{\Omega})$ désigne l'ensemble des fonctions continues sur $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$).

Pour appliquer la MEF, on va plus considérer $u \in \Omega$; un nouveau sous espace $V \subset \Omega$ des éléments v est introduit; où v est une fonction de classe $C^2(\bar{\Omega})$.

Soit $v \in V = v \in \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. On multiplie (2.32) par v , et on intègre sur Ω

$$-\int_{\Omega} \Delta u v = \int_{\Omega} f v. \quad (2.25)$$

À cet étape, on est besoin d'introduire la formule de **Green**

$$-\int_{\Omega} \Delta u v = + \int_{\Omega} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} v,$$

où le gardient $\vec{\nabla} u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n})$. Cette formule est la généralisation de la formule de l'intégration par parties.

On revient à notre équation (2.25) et on applique la formule de Green pour trouver :

$$\int_{\Omega} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} v = \int_{\Omega} f v., \quad \forall v \in V. \quad (2.26)$$

On rajoute à l'espace V d'autres conditions comme suit

$$V = \{v \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \text{ régulière } v = 0 \text{ sur } \partial\Omega.\}$$

Donc (2.26) peut être écrite

$$\int_{\Omega} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v = \int_{\Omega} f v, \quad \forall v \in V. \quad (2.27)$$

On a construit un problème variationnel décrit comme suit :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v = \int_{\Omega} f v, & \text{pour tout } v \in V \\ \text{Trouver } u \in V \text{ solution.} \end{cases} \quad (2.28)$$

Remarque 2.3.1 *En général, la dimension de V est infinie. Pour cela, on introduit un sous-espace $V_h \subset V$, tel que $\dim V_h = k_h$ est finie. Donc, il existe une base $(\xi_i)_i^{k_h}$ de fonctions pour V_h .*

On passe alors du problème (2.28) au problème (2.29)

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ solution,} \\ \int_{\Omega} \vec{\nabla} u_h \cdot \vec{\nabla} v_h = \int_{\Omega} f v_h, \end{cases} \quad v_h \in V_h. \quad (2.29)$$

(2.29) est appelé un problème variationnel approché.

Tant que v_h est un élément de V_h , donc, il peut être écrit en fonction des éléments de la base, disant $v_h = \xi_i$, $i = 1, \dots, k_h$, et de même pour $u_h = \sum_{j=1}^{k_h} u_k^j \xi_j$, où u_k^j sont des constantes.

L'équation du problème (2.29) devient, pour tout $i = 1, \dots, k_h$,

$$\int_{\Omega} \vec{\nabla} \left(\sum_{j=1}^{k_h} u_k^j \xi_j \right) \cdot \vec{\nabla} \xi_i = \int_{\Omega} f \xi_i,$$

ce qui donne, pour $i = 1, \dots, k_h$,

$$\sum_{j=1}^{k_h} \left(\int_{\Omega} \vec{\nabla} \xi_j \cdot \vec{\nabla} \xi_i \right) u_k^j = \int_{\Omega} f \xi_i.$$

Si on pose

$$A_{i,j} = \int_{\Omega} \vec{\nabla} \xi_j \cdot \vec{\nabla} \xi_i, \quad b_i = \int_{\Omega} f \xi_i.$$

D'où

$$\sum_{j=1}^{k_h} A_{i,j} u_k^j = b_i, \quad i = 1, \dots, k_h.$$

Si on introduit

$${}^t U_k = [u_h^1, \dots, u_h^{k_h}].$$

Donc le système peut être traduit comme $AU = B$.

Dèscription de la méthode MEF pour un problème mixte

On s'intéresse à résoudre

$$\begin{cases} -\Delta u = \alpha, & \text{dans } \Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \\ u = f, & \text{sur } \Gamma_1. \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g, & \text{sur } \Gamma_2. \end{cases} \quad (2.30)$$

où les données α , f , g sont des fonctions régulières.

Si on introduit la fonction u_0 définie sur $\mathbb{C}(\Omega)$, tel que $u_0 = f$ sur Γ_1 , et on pose $v = u - u_0$.

Alors

$$v|_{\Gamma_1} = u|_{\Gamma_1} - u_0|_{\Gamma_1} = f - f = 0;$$

De plus

$$\frac{\partial v}{\partial n}|_{\Gamma_2} = \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_2} - \frac{\partial u_0}{\partial n}|_{\Gamma_2} = g - \frac{\partial u_0}{\partial n}|_{\Gamma_2} = g_1.$$

Donc v est une solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta v = \alpha_1, & \text{dans } \Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \\ v = 0 & \text{sur } \Gamma_1. \\ \frac{\partial v}{\partial n} = g_1 & \text{sur } \Gamma_2, \end{cases} \quad (2.31)$$

avec $\alpha_1 = \alpha + u_0$.

On considère le problème (juste on change v par u)

$$\begin{cases} -\Delta u = \alpha_1, & \text{dans } \Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_1. \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g_1 & \text{sur } \Gamma_2, \end{cases} \quad (2.32)$$

Si $\alpha_1 \in \mathbb{C}(\Omega)$, alors on choisit $u \in \mathbb{C}^2(\Omega)$.

Soit $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$; on multiplie par v , et on intègre sur Ω , on trouve

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \Delta u v &= \int_{\Omega} \alpha_1 v, \\ \int_{\Omega} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v &= \int_{\Omega} \alpha_1 v, \\ \int_{\Omega} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v - \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial n} v - \int_{\Gamma_2} \frac{\partial u}{\partial n} v &= \int_{\Omega} \alpha_1 v, \\ \int_{\Omega} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v - \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial n} v - \int_{\Gamma_2} g v &= \int_{\Omega} \alpha_1 v. \end{aligned}$$

On introduit l'espace $V = \{v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad v \in \mathbb{C}^1(\Omega), \quad v|_{\Gamma_1} = 0\}$.

Alors, le problème devient

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V \\ \int_{\Omega} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v = \int_{\Gamma_2} g v + \int_{\Omega} \alpha_1 v \quad \text{pour tout } v \in V. \end{cases} \quad (2.33)$$

Dans cette étape, on est besoin de construire un espace de dimension finie $\tilde{V} \subset V$, avec $\dim \tilde{V} = k_h < \infty$.

$$\tilde{V} = \{\tilde{v}; \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tilde{v}|_{\Gamma_1} = 0.\}$$

Dans la suite, avec un exemple en 1D, on va construire une base pour l'espace \tilde{V} , qui va nous aider à trouver la solution approchée d'un problème elliptique.

Exemple en 1D

Prenant le cas de l'équation différentielle

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), & x \in (0, 1) \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \quad (2.34)$$

Soit une fonction $v \in \mathcal{C}^1([0, 1])$, nulle en 0 et 1. On multiplie l'équation par v et on intègre de 0 à 1. Alors, on a

$$-\int_0^1 u''(x)v(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx,$$

et donc,

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx, \quad \forall v \in V,$$

avec $V = \{v \in \mathcal{C}([0, 1]); v(0) = v(1) = 0, v' \text{ est continue par morceaux}\}$.

On cherche alors à écrire un problème approché dans un sous espace de dimension finie. Soit \tilde{V} un sous espace de V de dimension N finie. Soit $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N\}$ une base de l'espace \tilde{V} . Ainsi toute fonction \tilde{u} de \tilde{V} peut s'écrire comme suit

$$\tilde{u}(x) = \sum_{j=1}^N u_j \phi_j(x).$$

Résoudre le problème différentiel de départ revient alors à chercher une solution $\tilde{u} \in \tilde{V}$ telle que

$$\int_0^1 \tilde{u}'(x)\tilde{v}'(x)dx = \int_0^1 f(x)\tilde{v}(x)dx, \quad \forall \tilde{v} \in \tilde{V},$$

c'est à dire chercher N réels u_1, u_2, \dots, u_N , vérifiant

$$\sum_{j=1}^N u_j \int_0^1 \phi_j'(x)\tilde{v}'(x)dx = \int_0^1 f(x)\tilde{v}(x)dx, \quad \forall \tilde{v} \in \tilde{V},$$

ou encore (en prenant $\tilde{v} = \phi_i$)

$$\sum_{j=1}^N u_j \int_0^1 \phi'_j(x) \phi'_i(x) dx = \int_0^1 f(x) \phi_i(x) dx, \quad \forall \phi_i \in \tilde{V}. \quad (2.35)$$

On remarque que la formule (2.35) peut être écrite sous forme matricielle $AU = B$, avec $A = (a_{ij})N$, où $a_{ij} = \int_0^1 \phi'_j(x) \phi'_i(x)$, $B = (b_i)1 \times N$, $b_i = \int_0^1 f(x) \phi_i(x) dx$, et le vecteur des inconnues $u = (u_1, \dots, u_N)$.

Il reste à choisir les N fonctions ϕ_i de manière que le système soit simple à résoudre numériquement.

Choix des fonctions ϕ_i

L'intervalle $(0, 1)$ est discrétisé en N points de coordonnées x_i . Les fonctions $\phi_i(x)$ sont choisies comme des fonctions polynomiales de degré 1 définies par

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} & \text{si } x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}} & \text{si } x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.36)$$

Ces éléments sont appelés les éléments finis d'ordre un. Il est aussi possible de choisir pour éléments finis des fonctions de degré deux ou plus.

Le calcul de la matrice A fait intervenir les dérivées $\phi'_i(x)$ simples à calculer :

$$\phi'_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{x_i-x_{i-1}} & \text{si } x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \frac{1}{x_i-x_{i+1}} & \text{si } x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.37)$$

Donc, les éléments de la diagonale de la matrice A sont écrits sous la forme

$$a_{i,i} = \int_0^1 \phi'_i(x) \phi'_i(x) dx = \frac{1}{x_i - x_{i-1}} + \frac{1}{x_{i-1} - x_i},$$

$$a_{i,i+1} = \int_0^1 \phi'_{i+1}(x) \phi'_i(x) dx = \frac{-1}{x_{i+1} - x_i},$$

$$a_{i-1,i} = \int_0^1 \phi'_i(x)\phi'_{i-1}(x)dx = \frac{-1}{x_i - x_{i-1}}.$$

Pour calculer les composantes du vecteur B , on choisit la méthode des trapèzes, et on trouve

$$b_i = \int_0^1 f(x)\phi_i(x)dx = f_i\left(\frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2}\right).$$

Dans le cas où les N points de l'intervalle $(0, 1)$ sont régulièrement espacés avec un pas h . La discrétisation en éléments finis devient

$$\frac{2u_i - u_{i-1} - u_{i+1}}{h^2} = f_i, \quad i \in 1, \dots, N,$$

et donc la forme matricielle s'écrit comme suit

$$\frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-1} \\ f_N \end{pmatrix}.$$