Chapitre 3

Équations elliptiques

On a vu dans les premiers chapitres la forme générale des équations elliptiques de différents ordres. On s'intéresse dans cette section à la conduction 1D en régime stationnaire où on va étudier la méthode TDMA pour résoudre une équation algébrique linéaire.
La conduction en régime stationnaire veut dire que la température ne dépend pas du temps, et que la température dépend uniquement des variables spaciales.
La conduction thermique est le transfert de la chaleur sans mouvements macroscopiques de la matière. Elle est dominante surtout dans les milieux solides.

3.1 Conduction 1D en régime stationnaire

Maillage

Un maillage est une partition de l'espace ou d'un domaine en cellules élémentaires.

Définition 3.1.1 *Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^n$, T_h est un maillage de Ω, si*

1 $\Omega = \bigcup_{k \in T_h} k$.

2 L'intérieur de tout élément k de T_h est non vide.

3 L'intersection de l'intérieur de deux éléments est vide.

Un maillage est dit "**conforme**" si l'intersection de deux éléments distincts k et k' est soit :

a- l'ensemble vide.

b- Un simplex commun à k et k' (noeud, arête, ou triangle en 3D).

Pour être utilisable pour la simultion numérique, les maillages doivent :

* Représenter suffisamment bien la géométrie.
* Comporter suffisament d'éléments pour calculer précisément.

3.1.1 Méthode de TDMA

On présente dans partie l'algorithme de matrice tridiagonale (Tri-Diagonal Matrix Algorithm TDMA), également connu sous le nom d'algorithmr de Thomas, est une forme simplifiée qui peut être utilisée pour résoudre des systèmes tridiagonaux d'équations. Un système tridiagonal pour n inconnues peut s'écrire comme suit

$$a_i u_{i-1} + b_i u_i + c_i u_{i+1} = d_i, \tag{3.1}$$

où

$$a_1 = 0, \qquad c_N = 0;$$

ou sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} b_1 & c_2 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & b_2 & c_3 & \cdots & 0 \\ 0 & a_3 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & c_N \\ 0 & 0 & \cdots & a_N & b_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N, \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{N-1} \\ d_N \end{pmatrix}.$$

On remarque dans léquation (3.1) que la i^{eme} inconnue peut être réécriteen fonction de la i^{eme+1} inconnue, i.e ;

$$u_i = P_i u_{i+1} + Q_i, \tag{3.2}$$

$$u_{i-1} = P_{i-1} u_i + Q_{i-1}, \tag{3.3}$$

où P_i et Q_i sont des constantes. On note que si toutes les équations du systèmes sont exprimées de cette manière, alors la matrice devient une matrice triangulaire supèrieure. Pour déterminer les coefficients P_i et Q_i, on substitue l'équation (3.3) en (3.1), et on trouve :

$$a_i(P_{i-1}u_i + Q_{i-1}) + b_i u_i + c_i u_i = d_i,$$

$$(a_iP_{i-1} + b_i)u_i + c_iu_{i+1} = d_i - a_iQ_{i-1},$$

ce qui donne

$$u_i = \frac{-ci}{a_iP_{i-1} + b_i}u_{i+1} + \frac{d_i - a_iQi - 1}{c_iP_{i-1} + b_i}. \tag{3.4}$$

On compare les équations (3.2) et (3.4), on obtient

$$P_i = \frac{-c_i}{bi + a_iP_{i-1}}, \qquad Q_i = \frac{d_i - a_iQ_{i-1}}{bi + a_iP_{i-1}}. \tag{3.5}$$

Pour calculer P_1 et Q_1, on utilise le fait que $a_1 = 0$, et on trouve que $P_1 = \frac{-c_1}{b_1}$, et $Q_1 = \frac{d_1}{b_1}$, (on remarque que les termes P_0 et Q_0 disparaissent).
Dans la suite, il suffit d'utiliser la relation de réccurence pour trouver toutes les termes P_i et Q_i.
Maintenant, pour commencer la substitution inverse, on utilise $c_N = 0$, ce qui donne $P_N = 0$, et $u_N = Q_N$. Enfin, on utilise l'équation (3.2) pour trouver $u_{N-1}, ..., u_1$.

Exemples 3.1.1 *En utilisant l'algorithme de Thomas (la méthode de TDMA), résoudre le problème suivant*

1-

$$\begin{pmatrix} 20 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 15 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 15 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 15 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5, \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1100 \\ 100 \\ 100 \\ 100 \\ 1100 \end{pmatrix}.$$

2- Résoudre par l'algorithme de Thomas le système $AU = f$, où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

et

$$f = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -14 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

3.2 Conduction 2D et 3D

3.2.1 Résolution des équations algébriques par la méthode de Gauss Seidel

On va étudier une méthode de résolution des systèmes linéaires : la méthode de Gauss-Seidel. L'objectif est de construire une suite vectorielle convergente vers la solution exacte du système linéaire.

Principe de construction

La méthode de Gauss-Sidel est une méthode de résolution itérative du système linéaire de la forme :

$$Ax = b, \tag{3.6}$$

tel que

$$A \;\; \textit{est une matrice dans } \mathbb{M}(n),$$

$$x \;\; \textit{est le vecteur des inconnues},$$

$$b \;\; \textit{est un vecteur du second membre}.$$

Pour cela, on utilise une suite $x^{(k)}$ qui converge vers un point fixe x solution du système déquations linèaires.
On cehrche à construire l'algorithme $x^{(0)}$ donnée, et la suite $x^{(k+1)} = F(x^{(k)})$ avec $k \in \mathbb{N}$.
On décompose A de la forme $A = M - N$, telle que M est une matrice inversible. Le système 3.6devient

$$(M - N)x = b, \tag{3.7}$$

c'est à dire

$$Mx = Nx - b. \tag{3.8}$$

Puisque M est inversible, on multiple les deux membres du système par M^{-1}, et on trouve :

$$x = M^{-1}Nx + M^{-1}b. \tag{3.9}$$

On obtient, donc, l'algorithme suivant :

$$\begin{cases} x^{(0)} donne, \\ x^{(k+1)} = M^{-1}Nx^{(k)} + M^{-1}b. \end{cases} \tag{3.10}$$

La matrice A peut être dÉcomposée de la manière suivante :

$$A = D + E + F,$$

où

$$E \quad est\ une\ matrice\ triangulaire\ inferieure,$$

$$D \quad est\ une\ matrice\ diagonale,$$

$$F \quad est\ une\ matrice\ triangulaire\ superieure.$$

Pour $n = 3$; $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. Alors

$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Dans la méthode de gauss-Seidel, on prend :

$$M = D + E, \qquad N = -F.$$

Alors l'algorithme (3.10) devient

$$\begin{cases} x^{(0)} donne, \\ x^{(k+1)} = (D + E)^{-1}Fx^{(k)} + (D + E)^{-1}b. \end{cases} \tag{3.11}$$

Remarque 3.2.1 *Pour appliquer la méthode de Gauss-Seidel, il faut que l'une des trois conditions de convergence soit vérifiée :*

1- $|a_{ii}| \geq \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$, *pour tout* $i = 1, ..., n$.

2- $\sum_{k=1}^{n} |a_{ij}| < 1$,

3- $\rho(M^{-1}N) < 1$, *où* (ρ *:est le rayon spectral).*

Application (n=3)

On a
$x_1 = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3)$,
$x_2 = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3)$,
$x_3 = \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2)$,
alors, les itérations de l'algorithme (3.11) deviennent comme suit

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)}),$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)}),$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1^{(k+1)} - a_{32}x_2^{(k+1)}).$$

Exemples 3.2.1 *Résoudre à l'aide de la méthode de Gauss-Seidel le système suivant*

$$\left\{ \begin{array}{c} 4x_1 + x_2 - x_3 = 3, \\ 2x_1 + 7x_2 + x_3 = 19, \\ x_1 - 3x_2 + 12x_3 = 31. \end{array} \right. \tag{3.12}$$

3.2.2 Résolution des équations algébriques par la méthode de relaxation

La méthode de relaxation est une méthode itérative qui permet de résoudre un système de la forme $Ax = b$, avec A est une matrice inversible d'ordre n ; b est un vecteur du second membre qui appartient à $\mathbb{R}^n$.
Dans cette méthode, on va construire une suite $x^{(n)}$ qui converge vers une solution exacte x^*.
On va décomposer la matrice A comme suit :

$$A = D + U + L;$$

avec D est une matrice diagonale,
U est une matrice traingulaire supèrieure,
L est une matrice traingulaire infèrieure.
La matrice de relaxation se caractrèrise par le paramètre ω, ce paramètre n‘est que le poids ; c'est à dire $\omega > 0$.
Si $\omega = 1$, on trouve la méthode de Gauss-Seidel. Alors, la méthode de relaxation n'est que la généralisation de la méthode de Gauss-Seidel.
En partant d'un système

$$Ax = b;$$

on multiple par ω, pour trouver

$$\omega Ax = \omega b;$$

on remplace A par sa décomposition

$$\omega(D + U + L)x = \omega b$$

ce qui donne

$$\omega Lx = \omega b - \omega Dx - \omega Ux;$$

maintenant, on multiple par Dx les deux membres de la dernière équation, pour obtenir

$$(\omega L + D)x = \omega b - (\omega Dx + \omega Ux) + Dx;$$

ce qui donne

$$(\omega L + D)x = \omega b - ([\omega U + (\omega - 1)D]x).$$

Tant que $(D + \omega L)$ est inversible, alors

$$x = (\omega L + D)^{-1}(\omega b - ([\omega U + (\omega - 1)D]x)).$$

Donc, le schéma itératif est donné comme suit

$$\left\{ \begin{array}{c} x^{(0)} \qquad donnee, \\ x^{(k+1)} = (\omega L + D)^{-1}(\omega b - ([\omega U + (\omega - 1)d]x^{(k)})). \end{array} \right. \tag{3.13}$$

La matrice $(D + \omega L)$ étant triangulaire, il est aisé de calculer son inverse, d'où

$$x_i^{(k+1)} = (1 - \omega)x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}}(b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)}), \qquad i = 1, ..., n.$$

Théorème 3.2.1 *(De convergence) : On suppose que A est symétrique, définie positive. Alors, la méthode de relaxation converge pour tout $\omega \in]0, 2[$*

Rappel :

- Une matrice A est dite symétrique si $A^t = A$.
- Une matrice A est dite définie positive si tous ses valeurs propres sont strictement positives.

Exemples 3.2.2 *En partant de $x^{(0)} = (0, 0, 0)^t$, déterminer les six premiers itérés de la méthode de relaxation.*

$$(S) : \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = -1, \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 = 7, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = -7. \end{cases} \tag{3.14}$$