Chapitre 1

Introduction

L'analyse numérique est la conception et létude d'algorithmes pour des solutions á des ensembles des équations issues de modéles de la physique et d'autres domaines...
Pour traiter tout phénomène physique (ou chimique) on peut utilser :

- L'approche analytique.
- L' expérience.
- L'approche numérique.

L'approche numérique (Le calcul numérique)

Le modèle mathématique constitue des équations difféntielles partielles (EDP) peut être transformé á l'aide d'une méthode de discrétisation en un système d'équations algébriques.
Par définition la discrétisation est une opération qui consiste á remplacer des relations entre des fonctions continues dérivables par un nombre fini de relations algébriques.
Avantages Les avantages de cette approche sont :

- faible cout.
- Rapidité.
- Valable pour tous les modèles physiques ayant un modèle mathématique.

Inconvénients Pour les inconvénients on peut citer

- Moins précise par rapport aux autres méthodes.
- Parfois plus couteuse lorsque les capacités de stockage sont trés grandes ou bien le temps de calcul devient important.

1.1 Les équations aux dérivées partielles (EDP)

Une équation aux dérivées partielles (ou simplement EDP) est une équation dont l'inconnue est une fonction et partant sur les dérivées partielles de cette fonction.
Si on note

$$\begin{array}{rcl} y : \mathbb{R}^n \, (\Omega \;\; un \quad ouvert \quad dans \, \mathbb{R}^n) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & y(x) \end{array} \tag{1.1}$$

Alors l'équation s'écrit sous la forme :

$$F(x, y(x), Dy(x), ..., D^p y(x)) = 0, \quad n, p \in \mathbb{N}^*, \tag{1.2}$$

où p : est appelé l'ordre de l'EDP, et

$$F : \mathbb{R}^n \star \mathbb{R}^{n^2} \star ...\mathbb{R}^{n^p} \quad est \quad une \;\; fonction \quad donnée \; . \tag{1.3}$$

Les EDP proviennent de la modélisation mathématique, cád la transcription en équations, de problèmes intervenant dans tous les domaines des sciences : physique, chimie, finance,....

Modélisation du phénomène de transport

Un phénpmène de transport (phénpmène de transfert) est une phénpmène irrévisble durant lequel une grandeur physique est transportée par le biais de moléculaires et qui a pure origine l'inhomogénéité d'une grandeur intensive. C'est la tendance spontanée des systèmes physiques et chimiques á rendre uniforme ces grandeurs qui provoquent le transport.

1.1.1 Principe de conservation

Pour un changement chimique, le principe de la conservation indique que la masse des réactifs et des produits restera la même, car les mêmes atomes au début et la fin de la réaction. Il se produira un réarrangement des atomes pour former des nouvelles moléculaires á la fin de la réaction.
Résultat : Le principe de la conservation indique que la masse des réactifs est égale á la masse des produits.

1.1.2 Equation de continuité

Le principe de conservation de masse peut être formulé comme suit : L'accumulation de masse dans un volume donné par unité de temps est égale à la différence entre les masses qui entrent et celles qui sortent du volume. Il est exprimé par l'équation de continuité comme suit :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla \cdot \varphi \overrightarrow{V} = 0. \tag{1.4}$$

1.1.3 Equation de l'énergie

L'équation de l'énergie s'écrit comme suit :

$$\varphi C_P \frac{DT}{Dt} = \nabla \cdot (k \nabla T) + q + \mu \phi. \tag{1.5}$$

En coordonnées cartésiennes, l'expression de la dissipation visqueuse s'écrit :

$$\phi = 2\mu[(\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial v}{\partial y})^2 + (\frac{\partial w}{\partial z})^2 + \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x})^2 + \frac{1}{2}(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y})^2 + (\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z})^2] + \eta(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z})^2 \tag{1.6}$$

1.1.4 Equation de conservation d'espèce chimique

$$\frac{\partial(\rho Y_i)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho V Y_i) = -\nabla \cdot \overrightarrow{J_i} + R_i + S_i, \tag{1.7}$$

avec :
Y_i : est la fraction massique locale de l'espèce chimique i,
$\overrightarrow{J_i}$: C'est le flux de diffusion de l'espèce i,
R_i : remplace le taux net de production de l'espèce i par réaction chimique,
S_i : Le taux création par addition de la phase dispersée et autres sources,
ρ : signifie la masse volumique.

1.2 Classification des équations différentielles aux dérivées partielles

La forme générale des équations aux dérivées partielles

Une équation aux dérivées partilles du deuxième ordre est donnée (en coordonées cartésiennes) sous la forme

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G, \tag{1.8}$$

où les coefficients $A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F,\ G$ sont des fonctions de deux variables (Elles dépendent seulement de $x,\ y$). La classification est faite sur la base des ces coefficients.

L ?EDP est dite linéaire si u est linéaire par rapport à variables et ses dérivées partielles, et si les coefficients qui les lient ne dépendent que de (x, y) ; sinon elle est non linéaire.

1.3 Classification au sens mathématique

Considérant l'EDP (2.8), et posant

$$\Delta = B^2 - 4AC. \tag{1.9}$$

Alors
- l'EDP est dite **hyperbolique** si $\Delta > 0$.
- L'EDP est dite **parabolique** si $\Delta = 0$.
- L'EDP est dite **ellptique** si $\Delta < 0$.

Exemples 1.3.1 *On considère u une fonction à deux variables.*
1). $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2x\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2\frac{\partial u}{\partial x} + u = x$ *est de type parabolique* ($\Delta = 0$ *).*
2). $y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + u = 0$ *est de type hyperbolique si* $y > 0$, *parabolique si* $y = 0$, *et de type elliptique pour* $y < 0$ ($\Delta = 4y$).

Exemples 1.3.2 — *L'equation de la chaleur (de diffusion)*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

est parabolique.

— *L'equation des ondes*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

est hyperbolique.

— *L'equation de Laplace*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

est elliptique.

Classification mathématique dans le cas générale (p variables indépendantes)

Si u est une fonction de p variables indépendantes, les EDP linéaires du second ordre sont du type :

$$\sum_{i=1}^{p} A_i(x_1, ..., x_p)\frac{\partial^2 u}{\partial {x_i}^2} + \sum_{i=1}^{p} B_i(x_1, ..., x_p)\frac{\partial u}{\partial x_i} + C(x_1, .., x_p)u + D(x_1, .., x_p) = 0. \quad (1.10)$$

Si tous les A_i sont non nuls et de même signe, l'EDP est de type elliptique.
Si tous les A_i sont non nuls et sont ; à une exception près, de même signe, l'EDP est de type hyperbolique.
Si un seul des A_i est nul et tous les autres de même signe et si l'un des B_i est non nul, l'EDP est de type parabolique.

1.4 Classification au sens physique

La classification au sens physique des équations aux dérivées partielles peut être dévisée en deux grandes catégories.

— Les équations qui modélisent **des problèmes d'état d'équilibre** ou **stationnaire** appartiennent à la classe dite des problèmes elliptiques. L'équation de Laplace et celle de Poisson font partie de cette classe.

— La deuxième classe est celle **des problèmes d'évolution** dont les solutions dépendent du temps, c'est-à-dire les équations de type parabolique et de type hyperbolique.

Exercice 1 *Quel est le type de chaque équation :*

1). $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, *où* $a \in \mathbb{R}$.

2). $\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 3\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, *où* $c \in \mathbb{R}$.

3). $x\frac{\partial u}{\partial x} - 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$.

4). $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + y\frac{\partial u}{\partial x} = 0$.

Conditions aux limites

Les conditions aux limites (ou conditions aux bords) sont les contraintes sur les valeurs que prennent la solution des EDP sur une frontière Ω (si $\Omega \in \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert $]a, b[$, dans ce cas $\partial\Omega = \{a, b\}$). On se base dans notre cours sur trois types.

Conditions aux limites de Dirichlet

Ce type de conditions est imposé à l'équation (1.2) lorsqu'on spécifie les valeurs que la solution doit vérifier sur les frontières du domaine Ω. c'est à dire, si on pose f, une fonction définie sur $\partial\Omega$, alors

$$u(x) = f(x) \quad \forall\ x \in \partial\Omega. \tag{1.11}$$

Exemples 1.4.1 *On considère une plaque d'épaisseur L. On suppose que la surface de la frontière à* $x = 0$ *est maintenue à la temperature uniforme* T_1*, et la surface de frontière* $x = T$ *à la température uniforme* T_2*. Dans ce cas les conditions aux bords peuvent être comme suit*

$$\begin{cases} u(0, t) = T_1, & t>0 \\ u(T, t) = T_2. \end{cases} \tag{1.12}$$

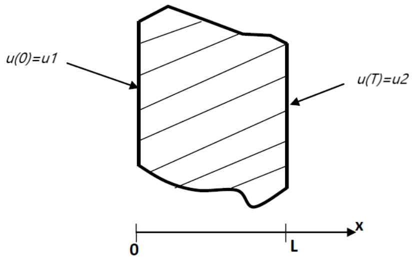

FIGURE 1.1 – Les conditions aux limites de Dirichlet.

Conditions aux limites de Newmann

Ce type de conditions est appliquée à une équation (1.2) lorsqu'on spésifie les valeurs que la solution doit vérifier sur les frontières. Soit g une fonction définie sur $\partial\Omega$ et telle qu'en tout point $x \in \partial\Omega$ on a

$$\frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{n}} = g(x), \tag{1.13}$$

$\overrightarrow{n}$ est le vecteur normal à $\partial\Omega$.

Conditions aux limites mixtes

Il s'agit d'une relation linèaire entre les valeurs de la fonction et les valeurs de la dérivée de la fonctionsur le bord du domaine. Posant h définie sur $\Omega \cup \partial\Omega$, pour tout $x \in \Omega \cup \partial\Omega$

$$\alpha_1(x)u(x) + \alpha_2(x)\frac{\partial u(x)}{\partial \overrightarrow{n}}(x) = h(x). \tag{1.14}$$