TD N°2 Variables aléatoires

Exercice 1. *La loi de la v.a. X est donnée par le tableau suivant :*

x_i	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$	$0,25$	p_2	$0,18$	p_4	$0,37$

1. Déterminer les valeurs de p_2 et p_4 dans les deux cas suivants

a. Si les évènements $\{X = 2\}$ et $\{X = 4\}$ sont équiprobables.

b. Si $E(X) = 3,14$

2. Calculer la fonction de répartition de X.

Exercice 2. *Dans une usine la proportion des pièces défectueuses et de 3%. On extrait un échantillon (tirage avec remise) de 100 pièces. Calculer la probabilité qu'au moins trois sont défectueuses dans l'échantillon.*

Exercice 3. *Une urne contient 6 boules noires et 4 boules blanches. On tire 5 boules et soit X le nombre de boules noires tirées. Donner la loi de X ,$E(X)$, $V(X)$ dans les deux cas..*

a. Le tirage est sans remise

b.Le tirage est avec remise

Exercice 4. *Une variable aléatoire X a une densité de probabilité f_X définie par :*

$$f_X(x) = \begin{cases} cx & , \text{ pour } 0 \leq x < 2 \\ c(4-x) & , \text{ pour } 2 \leq x \leq 4 \\ 0 & , \text{ ailleurs} \end{cases}$$

1. Calculer c, $E(X)$, $V(X)$ et σ_X.

2. Déterminer la fonction de répartition de X et calculer les probabilités $P(X \leq 3)$, $P(X > 3)$, $P(X \in [-3, 3])$.

Exercice 5. *On lance deux dés équilibrés et on considère la plus petite valeur obtenue. On définit la variable aléatoire Y, valant 3 fois la plus petite valeur obtenue.*

Décrire la loi de probabilité de Y, puis calculer son espérance et son écart-type.

Exercice 6. *Soit X une variable aléatoire de densité f donnée par*

$$f(t) = \begin{cases} ct^2, \text{ si } t \in [-a, a] \\ 0, \text{ si } t \notin [-a, a] \end{cases}$$

a) Déterminer c en fonction de a puis calculer $E(X)$ et $V(X)$.

b) Déterminer la fonction de répartition de X.

c) Calculer $P\left(X > \frac{a}{2}\right)$, $P\left(X < -\frac{a}{2}\right)$ et $P\left(-\frac{a}{2} < X < \frac{a}{2}\right)$.

d) Soit $Y = \sin(X)$ calculer $E(Y)$ et $E(X^2 Y)$.

Exercice 7. *Soit la fonction F donnée par*

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ pour } x < 0 \\ \frac{[x]}{1+[x]} & , \text{ pour } x \geq 0 \end{cases}$$

où $[x]$ désigne la partie entière de x.

1. Vérifier que F est en effet une fonction de répartition.

2.Calculer $P(\{1\})$, $P(]1, 2])$, $P([1, 4])$.

3. Calculer, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, $P(\{n\})$?

Exercice 8. *À quelle condition sur le réel λ , la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \lambda |x| e^{-|x|}$ est-elle une densité de probabilité ? Dans ce cas, déterminer la fonction de répartition associée et calculer les probabilités $\mathbb{P}(]-\infty, 0])$, $\mathbb{P}([0, +\infty[)$, et $\mathbb{P}(]1, 3])$.*